

考点一：集合和简易逻辑

1、集合的概念

(1) 集合：一组对象的全体形成一个集合，或者说，某些指定的对象集在一起就形成一个集合，简称集。

(2) 元素：集合中每个对象叫做这个集合的元素。

注意：①组成集合的可以是任何事物、东西等，

②一般用大括号表示集合且常有大写字母表示

如集合 $A = \{1, 2, 4\}$

2、元素对于集合的隶属关系

(1) 属于：如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A ，记作 $a \in A$

(2) 不属于：如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A ，记作 $a \notin A$

注：1、“ $\in$ ”的开口方向，不能把 $a \in A$ 颠倒过来写

3、常用数集及记法

(1) 非负整数集（自然数集）：全体非负整数的集合。记作 N （如：0、1、2、3、...）

(2) 正整数集：非负整数集内排除 0 的集合。记作 N^+ 或 N_+ （如：1、2、3、4）

(3) 整数集：全体整数的集合。记作 Z （如：-1、0、1、2）

(4) 有理数集：全体有理数的集合。记作 Q ，整数和分数统称为有理数，

(5) 实数集：全体实数的集合。记作 R ，有理数和无理数统称为实数

4、集合与集合间关系

(1) 子集：对两个集合 A 、 B ，若集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，则集合 A 叫做集合 B 的子集。记作 $A \subseteq B$ （或 $B \supseteq A$ ），读作 A 包含于 B 。（或 B 包含于 A ）

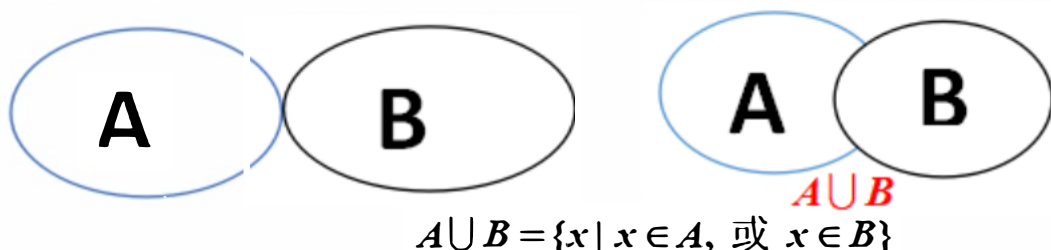
(2) 真子集： A 是 B 的子集，且 B 中至少有一个元素不属于 A ，那么集合 A 叫做集合 B 的真子集，记作 $A \subset B$

(3) 子集和真子集的性质

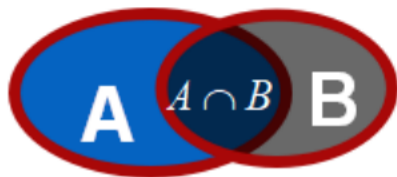
$A \subseteq A, \emptyset \subseteq A$ 。若 $A \subseteq B, B \subseteq C$ ，则 $A \subseteq C$ ；若 $A \subset B, B \subset C$ ，则 $A \subset C$ 。

5、并集与交集

(1) 并集定义：由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合称为集合 A 与 B 的并集，记作 $A \cup B$ ，读作“ A 并 B ”



(2) 交集定义：由属于 A 且属于 B 的所有元素组成的集合，就称为 A 与 B 的交集，记作 $A \cap B$ ，读作“ A 交 B ”



6、补集一般指绝对补集，即一般地，设 U 是一个集合， A 是 U 的一个子集，由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做子集 A 在 U 中的绝对补集（简称补集或余集）

7、简易逻辑【前充分，后必要，可前可后是充要】

命题：可以判断真假的语句叫做命题。语句是真的，叫真命题，语句是假的，叫假命题。

任何一个数学命题都有条件和结论两部分，如果把条件和结论分别用 A 、 B 表示，那么命题可以写成“如果 A 成立，那么 B 成立”，或简写成“若 A ，则 B ”。

如果 A 成立，那么 B 成立，即 $A \Rightarrow B$ ，这时我们说条件 A 是条件 B 成立的充分条件。

如果 B 成立，那么 A 成立，即 $A \Leftarrow B$ ，这时我们说条件 A 是条件 B 成立的必要条件。

如果 A 既是 B 成立的充分条件，又是 B 成立的必要条件，即既有 $A \Rightarrow B$ ，又有 $B \Rightarrow A$ ，这时我们说条件 A 是 B 成立的充分必要条件，简称充要条件。

考点二：不等式和不等式组

1. 不等式

一般地，用符号“ $<$ ”或“ $>$ ”表示大小关系的式子，叫做不等式。像 $a+2 \neq a-2$ 一般这样用符号“ $\neq$ ”表示不等关系的式子也是不等式。
地，一个含有未知数的不等式的所有的解组成这个不等式的解集。求不等式的解集的过程叫解不等式。

2. 不等式性质

如果 $a > b$ ，那么 $b < a$ ；如果 $a < b$ ，那么 $b > a$ ；

如果 $a > b, b > c$ ，那么 $a > c$ ；

如果 $a > b$ ，那么 $a+c > b+c$ ；

如果 $a > b, c > 0$ ，那么 $ac > bc$ ；如果 $a > b, c < 0$ ，那么 $ac < bc$ ；

如果 $a > b, c > d$ ；那么 $a+c > b+d$ ；

如果 $a > b > 0, c > d > 0$ ，那么 $ac > bd$ ；

如果 $a > b, ab > 0$ ，则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ；

如果 $a > b > 0$ ，那么 $a^n > b^n (n \in \mathbb{N}, n > 1)$ ；

如果 $a > b > 0$ ，那么 $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} (n \in \mathbb{N}, n > 1)$ ；

$|a+b| \leq |a|+|b| (a, b \in \mathbb{R}, \text{且当 } a, b \text{ 同号时取等号})$ 。

3. 一元一次不等式

定义：只有一个未知数，并且未知数的最高次数是一次的不等式，叫一元一次不等式。

解不等式步骤：

- (1) 去分母：不等式两边同时乘以分母的最小公倍数；
- (2) 去括号：注意括号前的符号，若为负要变号；
- (3) 移项：移项要变号，不等号方向不发生改变；
- (4) 合并同类项：找同类项；
- (5) 系数化为一：不等号两边同时乘以未知数系数的倒数；

4. 一元一次不等式组

定义：由几个一元一次不等式所组成的不等式组，叫做一元一次不等式组

解法：求出每个一元一次不等式的值，最后求这几个一元一次不等式的交集（公共部分）。

$$\begin{aligned} \text{①} \begin{cases} x > 5 \\ x > 3 \end{cases} & \text{解为 } \{x | x > 5\} \text{ 同大取大} & \text{②} \begin{cases} x < 5 \\ x < 3 \end{cases} & \text{解为 } \{x | x < 3\} \text{ 同小取小} \\ \text{③} \begin{cases} x > 5 \\ x < 3 \end{cases} & \text{解为 } \emptyset \text{ 大于大的小于小的，取空集} \\ \text{④} \begin{cases} x < 5 \\ x > 3 \end{cases} & \text{解为 } \{x | 3 < x < 5\} \text{ 大于小的小于大的，取中间} \end{aligned}$$

5. 含有绝对值的不等式

1. 定义：含有绝对值符号的不等式，如： $|x| < a$ ， $|x| > a$ 型不等式及其解法。

2. 简单绝对值不等式的解法：

$|x| > a$ 的解集是 $\{x | x > a \text{ 或 } x < -a\}$ ，大于取两边，大于大的小于小的。

$|x| < a$ 的解集是 $\{x | -a < x < a\}$ ，小于取中间；

3. 复杂绝对值不等式的解法：

$|ax+b|>c$ 相当于解不等式 $ax+b>c$ 或 $ax+b<-c$, 解法同一元一次不等式一样。
 $|ax+b|<c$, 相当于解不等式 $-c<ax+b<c$, 不等式三边同时减去 b , 再同时除以 a
(注意, 当 $a<0$ 的时候, 不等号要改变方向);

解析: 主要搞清楚取中间还是取两边, 取中间是连起来的, 取两边有“或”

6: 一元二次不等式

1. 定义: 含有一个未知数并且未知数的最高次数是二次的不等式, 叫做一元二次不等式。
如: $ax^2+bx+c>0$ 与 $ax^2+bx+c<0$ ($a\neq 0$)
2. 解法: 求 $ax^2+bx+c>0$ ($a>0$ 为例)
3. 步骤: (1) 先令 $ax^2+bx+c=0$, 求出 x (三种方法: 求根公式、十字相乘法、配方法)

$$\text{推荐求根公式法: } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(2) 求出 x 之后, 大于取两边, 大于大的小于小的; 小于取中间, 即可求出答案。

注意: 当 $a<0$ 时必须要不等式两边同乘 -1 , 使得 $a>0$, 然后用上面的步骤来解。

考点三：函数 【重点】

1. $y = kx + b$
 $y = ax^2 + bx + c$ 一般形式的定义域： $x \in \mathbb{R}$
2. $y = \frac{k}{x}$ 分式形式的定义域： $x \neq 0$ （分母不为零）
3. $y = \sqrt{x}$ 根式的形式定义域： $x \geq 0$ （偶次根号里不为负）
4. $y = \log_a x$ 对数形式的定义域： $x > 0$ （对数的真数大于零）

解析：考试时一般会求结合两种形式的定义域，分开最后求交集（公共部分）即可
 函数的奇偶性：

1. 函数奇偶性判别：
 - ① 奇函数 $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$
 - ② 偶函数 $\Leftrightarrow f(-x) = f(x)$
 - ③ 非奇非偶函数
2. 常见的奇偶函数
 - ① 奇函数： $y = x^n$ (n 为奇数), $y = \sin x$, $y = \tan x$
 - ② 偶函数： $y = x^n$ (n 为偶数), $y = \cos x$, $y = |x|$
 - ③ 非奇非偶函数： $y = a^x$, $y = \log_a x$
3. 奇偶性运算

① 奇+C=非奇非偶	② 偶+C=偶
③ 奇+奇=奇	④ 偶+偶=偶
⑤ 奇+偶=非奇非偶	⑥ 奇*奇=偶
⑦ 偶*偶=偶	⑧ 奇*偶=奇

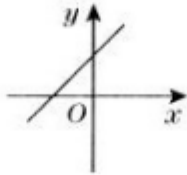
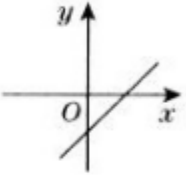
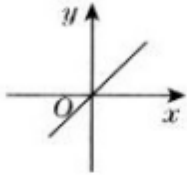
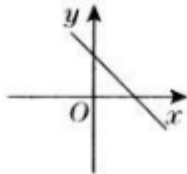
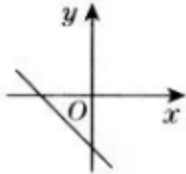
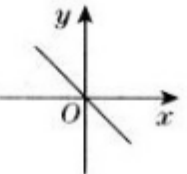
一次函数的表达式：

$y = kx + b$ ($k \neq 0, b$ 为任意实数。)

特殊的：当 $b = 0$ 时， $y = kx$ 为正比例函数。正比例函数是特殊的一次函数。

根据几何知识：经过两点能画出一条直线，并且只能画出一条直线，即两点确定一条直线，所以画一次函数的图像时，只要先描出两点，再连成直线即可。一般情况下：是先选取

它与两坐标轴的交点： $(0, b)$, $(-\frac{b}{k}, 0)$ 即横坐标或纵坐标为 0 的点。

	$b > 0$	$b < 0$	$b = 0$
$k > 0$	经过第一、二、三象限	经过第一、三、四象限	经过第一、三象限
			
	图像从左到右上升，y 随 x 的增大而增大		
$k < 0$	经过第一、二、四象限	经过第二、三、四象限	经过第二、四象限
			
	图像从左到右下降，y 随 x 的增大而减小		

二次函数的概念：

形如 $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c 是常数, $a \neq 0$) 的函数叫做 x 的二次函数

ax^2 叫做二次项, a 为二次项系数, bx 叫做一次项, b 为一次项系数, c 为常数项。

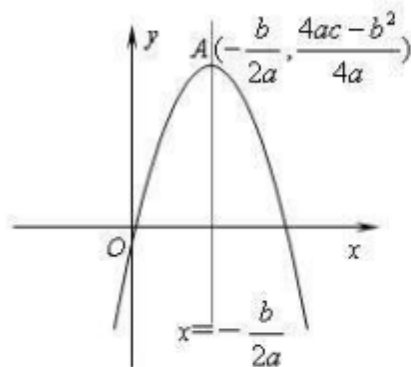
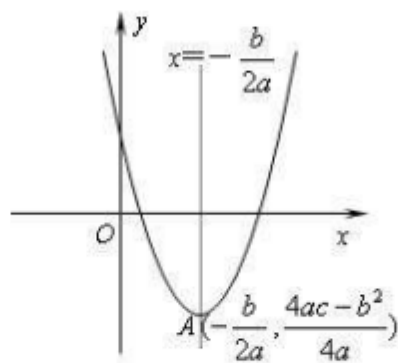
二次函数的特殊形式：

当 $b=0$ 时, $y=ax^2+c$

当 $c=0$ 时, $y=ax^2+bx$

当 $b=0, c=0$ 时, $y=ax^2$

图像：



①、当 $a>0$ 时，图像为开口向上的抛物线，顶点坐标为 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ ，对

称轴 $x=-\frac{b}{2a}$ ，有最小值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$ ， $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ 为单调递减区间， $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ 为单调递增区间；

②、当 $a<0$ 时，图像为开口向下的抛物线，顶点坐标为 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ ，对

称轴 $x=-\frac{b}{2a}$ ，有最大值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$ ， $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ 为单调递减区间， $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ 为单调递增区间；

③、韦达定理： $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

反比例函数：

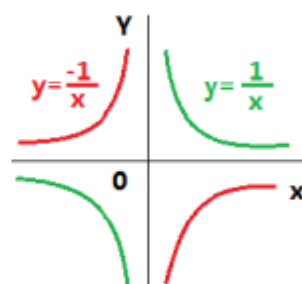
定义： $y = \frac{k}{x}$ 叫做反比例函数

1、定义域： $x \neq 0$

2、是奇函数

3、当 $k>0$ 时，函数在区间 $(-\infty, 0)$ 与区间 $(0, +\infty)$ 内是减函数

当 $k<0$ 时，函数在区间 $(-\infty, 0)$ 与区间 $(0, +\infty)$ 内是增函数



指数函数和对数函数：

$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 叫指数函数。 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ 叫对数函数。

名称	指数函数	对数函数
一般形式	$Y=a^x (a>0 \text{ 且 } a \neq 1)$	$y=\log_a x (a>0, a \neq 1)$
定义域	$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$
值域	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
过定点	$(0, 1)$	$(1, 0)$
图象	指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x (a>0, a \neq 1)$ 图象关于 $y=x$ 对称	
单调性	$a>1$, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为增函数 $0<a<1$, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为减函数	$a>1$, 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数 $0<a<1$, 在 $(0, +\infty)$ 上为减函数
值分布	$y>1?$ $y<1?$	$y>0?$ $y<0?$

考点四：对数和指数

有理指数幂：

$$1、a^n = a \times a \times a \cdots a \text{ 表示 } n \text{ 个 } a \text{ 相乘} \quad 2、a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$3、a^0 = 1 \quad 4、a^1 = a$$

$$5、a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$6、a^{-\frac{m}{n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{m}{n}} \text{ 先将底数变成倒数去负号} \quad \text{例：} \left(\frac{27}{64}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \left[\left(\frac{4}{3}\right)^3\right]^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

幂的运算法则：

$$1. a^x \times a^y = a^{x+y} \text{ (同底数指数幂相乘，指数相加)}$$

$$2. \frac{a^x}{b^y} = a^{x-y} \text{ (同底数指数幂相除，指数相减)}$$

$$3. (a^x)^y = a^{xy}$$

$$4. (ab)^x = a^x b^x$$

$$5. \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

解析：重点掌握同底数指数幂相乘和相除，用于等比数列化简。

对数：

1. 定义：如果 $a^b = N$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$)，那么 b 叫做以 a 为底的 N 的对数，记作

$\log_a N = b$ ($N > 0$)，这里 a 叫做底数， N 叫做真数。特别地，以 10 为底的对

数叫做常用对数，通常记 $\log_{10} N$ 为 $\lg N$ ；以 e 为底的对数叫做自然对数， e

≈ 2.7182818 ，通常记作 $\ln N$ 。

2. 两个恒等式： $a^{\log_a N} = N$ ， $\log_a a^b = b$

3. 几个性质：

➤ $\log_a N = b$ ， $N > 0$ ，零和负数没有对数

➤ $\log_a a = 1$ ，当底数和真数相同时等于 1

➤ $\log_a 1 = 0$ ，当真数等于 1 的对数等于 0

对数的运算法则:

$$1. \quad \log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$$

$$2. \quad \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$3. \quad \log_a M^n = n \log_a M \quad (\text{真数的次数 } n \text{ 可以移到前面来})$$

$$4. \quad \log_{a^n} M = \frac{1}{n} \log_a M \quad (\text{底数的次数 } n \text{ 变成 } \frac{1}{n} \text{ 可以移到前面来})$$

$$5. \quad \log_{N^a} M^b = \frac{b}{a} \log_N M$$

考点五：数列

通项公式与前 n 项和:

- 1、通项公式：如果一个数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与项数 n 之间的函数关系可以用一个公式来表示，这个公式就叫做这个数列的通项公式。知道一个数列的通项公式，就可以求出这个数列的各项。

- 2、 S_n 表示前 n 项之和，即 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ ，他们有以 $\left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right.$ 关系：

$$a_1 = S_1$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}, n \geq 2$$

备注：这个公式主要用来在不知道是什么数列的情况下求 a_n ，如果满足 $a_n - a_{n-1} = d$ 则

是等差数列，如果满足 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$ 则是等比数列。

等差数列与等比数列:

名称	等差数列	等比数列
定义	从第二项开始，每一项与它前一项的差等于同一个常数，叫做等差数列，常数叫公差，用 d 表示。 $a_n - a_{n-1} = d$	从第二项开始，每一项与它前一项的比等于同一个常数，叫做等比数列，常数叫公比，用 q 表示。 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$
通项公式	$a_n = a_1 + (n-1)d$ $a_n = a_m + (n-m)d \quad (n > m)$	$a_n = a_1 q^{n-1}$ $a_n = a_m q^{n-m} \quad (n > m)$
前 n 项和公式	$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$	$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \quad (q \neq 1)$
中项	如果 a, A, b 成差数列，那么 A 叫做 a 与 b 的等差中项，且有 $A = \frac{a+b}{2}$	如果 a, G, b 成比数列，那么 G 叫做 a 与 b 的等比中项，且有 $G = \pm\sqrt{ab}$
性质	在等差数列中若 $m+n = p+q$ ， 则有 $a_m + a_n = a_p + a_q$	在等比数列中若 $m+n = p+q$ ， 则有 $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$

考点六：三角函数及其相关概念

角的度量：

$$180^{\circ} = \pi \quad 360^{\circ} = 2\pi \quad 1^{\circ} = \frac{\pi}{180}$$

$$\text{角度和弧度的转换: } 120^{\circ} = 120 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{3} \quad \frac{5\pi}{6} = \frac{5 \times 180^{\circ}}{6} = 150^{\circ} \quad (\text{将 } \pi \text{ 换}$$

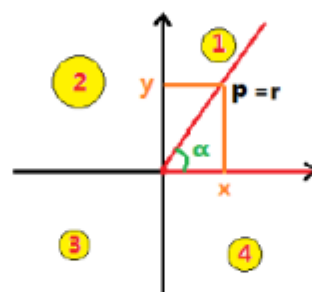
成 180°)

任意角的三角函数：

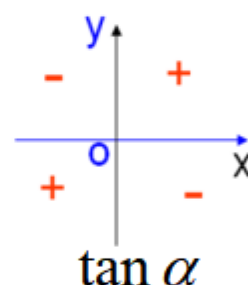
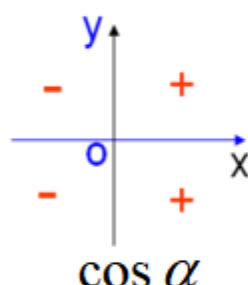
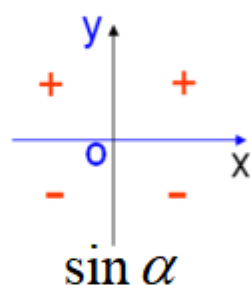
1、定义：在平面直角坐标系中，设 $P(x, y)$ 是角 α 的终边上的任意一点，且原点到该点的距离为 r ($r = \sqrt{x^2 + y^2}, r > 0$)，

$$\sin \alpha = \frac{\text{对边}}{\text{斜边}} = \frac{y}{r}, \cos \alpha = \frac{\text{邻边}}{\text{斜边}} = \frac{x}{r}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{对边}}{\text{邻边}} = \frac{y}{x}, \cot \alpha = \frac{\text{邻边}}{\text{对边}} = \frac{x}{y}$$



2、任意角的三角函数在各象限的符号



特殊角的三角函数值

α	角度制	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
	弧度制	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin \alpha$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan \alpha$		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

同角三角函数关系式：

平方关系是： $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

倒数关系是： $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$

商数关系是： $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ 。

诱导公式（奇变偶不变，符号看象限）：

$\sin(90^\circ + a) = \cos a$	$\cos(90^\circ + a) = -\sin a$	$\tan(90^\circ + a) = -\cot a$	$\cot(90^\circ + a) = -\tan a$
$\sin(90^\circ - a) = \cos a$	$\cos(90^\circ - a) = \sin a$	$\tan(90^\circ - a) = \cot a$	$\cot(90^\circ - a) = \tan a$
$\sin(270^\circ - a) = -\cos a$	$\cos(270^\circ - a) = -\sin a$	$\tan(270^\circ - a) = \cot a$	$\cot(270^\circ - a) = \tan a$
$\sin(270^\circ + a) = -\cos a$	$\cos(270^\circ + a) = \sin a$	$\tan(270^\circ + a) = -\cot a$	$\cot(270^\circ + a) = -\tan a$
$\sin(180^\circ + a) = -\sin a$	$\cos(180^\circ + a) = -\cos a$	$\tan(180^\circ + a) = \tan a$	$\cot(180^\circ + a) = \cot a$
$\sin(180^\circ - a) = \sin a$	$\cos(180^\circ - a) = -\cos a$	$\tan(180^\circ - a) = -\tan a$	$\cot(180^\circ - a) = -\cot a$
$\sin(360^\circ - a) = -\sin a$	$\cos(360^\circ - a) = \cos a$	$\tan(360^\circ - a) = -\tan a$	$\cot(360^\circ - a) = -\cot a$
$\sin(360^\circ + a) = \sin a$	$\cos(360^\circ + a) = \cos a$	$\tan(360^\circ + a) = \tan a$	$\cot(360^\circ + a) = \cot a$
$\sin(-a) = -\sin a$	$\cos(-a) = \cos a$	$\tan(-a) = -\tan a$	$\cot(-a) = -\cot a$

会用诱导公式用于求 120° 、 135° 、 150° 三角函数值

例如：

$$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\cos 150^{\circ} = \cos(180^{\circ} - 30^{\circ}) = -\cos 30^{\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

两角和、差，倍角公式：

$$1、\text{两角和、差：}\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

$$\tan \alpha \pm \tan \beta = \tan(\alpha \pm \beta)(1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta)$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{\tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

用两角和、差公式用于求 $15^{\circ}, 75^{\circ}, 135^{\circ}$ 三角函数值

$$2、\text{倍角公式：}\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a \rightarrow \frac{1}{2} \sin 2a = \sin a \cdot \cos a$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

三角函数的最小正周期公式及最值：

常见三角函数类型	周期公式	最大值	最小值
$y = A \sin(\omega x + \varphi) + B$ 或 $y = A \cos(\omega x + \varphi) + B$	$T = \frac{2\pi}{ \omega }$	$ A + B$	$- A + B$
$y = A \sin(\omega x + \varphi) + B \cos(\omega x + \varphi)$		$\sqrt{A^2 + B^2}$	$-\sqrt{A^2 + B^2}$

① $y = A \tan(\omega x + \varphi) + k$			
② $y = \sin^2 \omega x$ 或 $y = \cos^2 \omega x$			
③ $y = \sin \omega x $ 或 $y = \cos \omega x $			
④ $y = \sin \omega x \cdot \cos \omega x$			

$$T = \frac{\pi}{|\omega|}$$

考点七：解三角形

常用三角形知识点：

$\triangle ABC$ 中, A 角所对的边长为 a , B 角所对的边长为 b , C 角所对的边长为 c

1、三角形内角和为 180° 即 $A+B+C=180^\circ$

2、两边之和大于第三边, 两边之差小于第三边 即: $a+b>c$, $a-b<c$;

3、大边对大角, 小边对小角 若 $a>b$ 则 $A>B$

4、直角三角形勾股定理 $c^2 = a^2 + b^2$

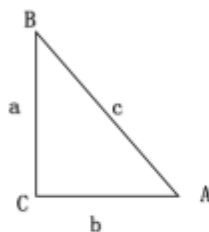
常见的勾股定理值: $3\ 4\ 5$; $5\ 12\ 13$; $1\ 1\ \sqrt{2}$; $1\ \sqrt{3}\ 2$.

解直角三角形：

在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$

1、两锐角之间的关系 $A+B=90^\circ$.

2、三边之间的关系 $a^2 + b^2 = c^2$ (勾股定理)



$$\sin A = \frac{A\text{的对边}}{\text{斜边}} = \frac{a}{c} = \cos B, \cos A = \frac{A\text{的邻边}}{\text{斜边}} = \frac{b}{c} = \sin B$$

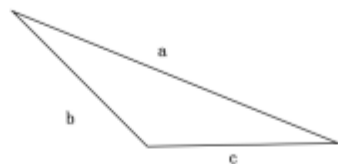
$$\tan A = \frac{A\text{的对边}}{A\text{的邻边}} = \frac{a}{b} = \cot B, \cot A = \frac{A\text{的邻边}}{A\text{的对边}} = \frac{b}{a} = \tan B$$

$$\text{直角三角形的面积 } S_{\triangle} = \frac{1}{2}ab$$

解斜三角形：

定义：三个角都不是直角的三角形叫做斜三角形

斜三角形 $\begin{cases} \text{钝角三角形 (有一个角是钝角)} \\ \text{锐角三角形 (三个角都是锐角)} \end{cases}$



内角和定理

斜三角形三个内角 A 、 B 、 C 之间的关系为：

$$(1) A + B + C = 180^\circ,$$

$$(2) \sin C = \sin(A + B)$$

$$(3) \sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}$$

余弦定理：

三角形任一边的平方等于其余两边的平方的和减去这两边与他们夹角的余弦乘积的两倍。

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

正弦定理：

三角形各边与它对角的正弦比值都相等，该比值为三角形外接圆半径的2倍。

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

面积公式：

$$S_{\triangle abc} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A$$

斜三角形的解法特点

- 1、由题意画出示意图
- 2、已知角求角用内角和定理求
- 3、已知两角和其中一角的对边时用正弦定理求
- 4、已知三边时用余弦定理求
- 5、已知两边和它们的夹角时用余弦定理求
- 6、已知边、边、角时用正弦定理求

性质： $a:b:c = \sin A:\sin B:\sin C$

在三角形中， $\sin A > \sin B$ 等价于 $a > b$ ，也等价于 $A > B$ ，这一性质可帮助通过角的正弦值大小关系判断边的长短关系，或由边的长短关系判断角的大小关系。

考点八：平面向量

定义：已知两个非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ ，它们的夹角为 θ ，我们把数量 $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 叫做向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的数量积（或内积），记作 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ，即

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta.$$

向量的数量积：

1、两个向量的数量积是一个实数，可以等于正数、负数、零.

2、如果 e 是单位向量，则 $a \bullet e = e \bullet a = |a| \cos \langle a, e \rangle$.

3、 $a \perp b \Leftrightarrow a \bullet b = 0$

4、 $a \bullet a = |a|^2$ 或 $|a| = \sqrt{a \bullet a}$

5、 $\cos \langle a, b \rangle = \frac{a \bullet b}{|a||b|}$

6、在坐标平面 xOy 内，已知 $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2)$,

则 $a \bullet b = a_1 b_1 + a_2 b_2$

$a \parallel b \Leftrightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ 或 $a \parallel b \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

7、向量的数量积满足以下规律

$a \bullet b = b \bullet a$;

$\lambda(a \bullet b) = (\lambda a) \bullet b = a \bullet (\lambda b)$

$(a + b) \bullet c = a \bullet c + b \bullet c$

两个公式：

1. 两点的距离公式：已知 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 两点，其距离：

$$|P_1 P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

2. 中点公式：已知 $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ 两点，线段 $P_1 P_2$ 的中点的 O 的坐标为 (x, y) ，

则：

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

考点九： 直 线

直线的斜率：

直线斜率的定义式为 $k = \tan \alpha$ (α 为倾斜角)，已知两点可以求的斜率 $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

(点 $A(x_1, y_1)$ 和点 $B(x_2, y_2)$ 为直线上任意两点)。

α	角度制	30°	45°	60°	120°	135°	150°
	弧度制	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\tan \alpha$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

直线方程的几种形式：

斜截式： $y = kx + b$ (可直接读出斜率 k)

一般式： $Ax + By + C = 0$ (直线方程最后结果尽量让 $A > 0$)

点斜式： $y - y_0 = k(x - x_0)$, (已知斜率 k 和某点坐标 (x_0, y_0) 求直线方程方法)

两条直线的位置关系：

直线 $l_1: y = k_1x + b_1$, $l_2: y = k_2x + b_2$

两条直线平行： $k_1 = k_2$

两条直线垂直： $k_1 \cdot k_2 = -1$

点到直线的距离公式：

点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $l: Ax + By + C = 0$ 的距离： $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

考点十：圆锥曲线

圆：

1、圆的标准方程是： $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ ，其中：半径是 r ，圆心坐标为 (a, b) ，

2、圆的一般方程是：

熟练掌握圆的一般方程转化为标准方程并找出半径和圆心坐标方法

例： $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$$

配方法： $x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 + y^2 - 6y + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = -4 + 13$

完全平方公式： $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 3^2$ 故半径 $r=3$ 圆心坐标为 $(-2, 3)$

3、圆与直线的位置关系：通过圆心到直线的距离 d 与半径 r 的大小关系判断

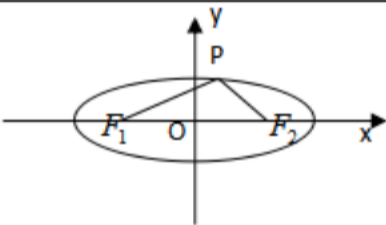
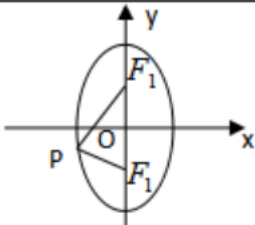
$d > r \Leftrightarrow$ 相离； $d = r \Leftrightarrow$ 相切； $0 < d < r \Leftrightarrow$ 相交不经过圆心； $d = 0 \Leftrightarrow$ 相交且经过圆心

4、圆与圆的位置关系：通过圆心距 $d_{O_1O_2}$ 与两圆半径 r_1, r_2 的大小关系判断

$d_{O_1O_2} > r_1 + r_2 \Leftrightarrow$ 相离； $d_{O_1O_2} = r_1 + r_2 \Leftrightarrow$ 外切；

$d_{O_1O_2} = r_1 - r_2 \Leftrightarrow$ 内切； $r_1 - r_2 < d_{O_1O_2} < r_1 + r_2 \Leftrightarrow$ 相交

椭圆：

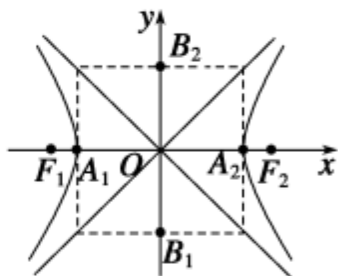
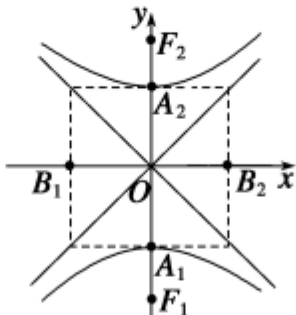
定义	平面内到两定点的距离的和等于常数的点的轨迹： $ PF_1 + PF_2 = 2a$	
焦点的位置	焦点在 X 轴上	焦点在 Y 轴上
标准方程	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$
图形		

性质	长轴长是 $2a$ ，短轴长是 $2b$ ，焦距 $ F_1F_2 =2c$ ， $a^2=b^2+c^2$ (a 最大)	
顶点	$A_1(-a,0)$ ， $A_2(a,0)$ $B_1(0,-b)$ ， $B_2(0,b)$	$A_1(0,-a)$ ， $A_2(0,a)$ $B_1(-b,0)$ ， $B_2(b,0)$
焦点坐标	$F_1(c,0)$ $F_2(-c,0)$	$F_1(0,c)$ $F_2(0,-c)$
离心率	$e = \frac{c}{a}$ ($0 < e < 1$)	
准线方程	$x = \pm \frac{a^2}{c}$	$y = \pm \frac{a^2}{c}$

求椭圆的标准方程步骤：

- 1) 确认焦点的位置设出标准方程；(题中直接已知或通过焦点坐标得到)
- 2) 求出 a, b 的值；(a, b, c, e 通过 $a^2 = b^2 + c^2$ ， $e = \frac{c}{a}$ 知二求二)
- 3) 写出椭圆的标准方程。

双曲线:

定义	平面内到两定点的距离的差的绝对值等于常数的点的轨迹： $ PF_1 - PF_2 = 2a$	
焦点的位置	焦点在 X 轴上	焦点在 Y 轴上
标准方程	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
图形		
性质	实轴长是 $2a$ ，虚轴长是 $2b$ ，焦距 $ F_1F_2 =2c$ ， $c^2=a^2+b^2$ (c 最大)	
顶点	$A_1(-a,0)$ ， $A_2(a,0)$ $B_1(0,-b)$ ， $B_2(0,b)$	$A_1(0,-a)$ ， $A_2(0,a)$ $B_1(-b,0)$ ， $B_2(b,0)$
焦点坐标	$F_1(c,0)$ $F_2(-c,0)$	$F_1(0,c)$ $F_2(0,-c)$
离心率	$e = \frac{c}{a}$ ($e > 1$)	

p 表示焦点到准线的距离，且 $p>0$ ，在求解过程中需确保 p 的取值符合该条件。
 焦点坐标与准线方程互为相反数，且可通过一次项系数确定。例如，对于 $y^2 = 2px$ ，焦点为 $(p/2,0)$ ，准线为 $x=-p/2$ ，判断焦点时可看一次项对应的未知数，焦点就在该轴上，求焦点可将一次项系数除以 4 得到一个坐标，另一个坐标为 0。

考点十一：概率

设事件 $A、B$ 互斥，把 $A、B$ 中有一个发生的事件记作 $A+B$ ， 则有 $P(A+B)=P(A)+P(B)$

对立事件 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

若 $A、B$ 是相互独立事件，它们同时发生的概率记作 $P(AB)$ ，那么 $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

若在一次试验中某事件发生的概率是 p ，那么在 n 次独立重复试验中，这个事件恰好

发生 k 次的概率

$$P_n(k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

在一组数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中，若其平均数为 $\overline{x}$ ，那么

$$\frac{1}{n}\Big[(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2\Big]$$

叫做这组数据的样本方差，记作 S^2 .

考点十二：排列组合

二、排列、组合

	排列	组合
定义	从 n 个不同元素中,任取 m ($m,n\in\mathbf{N}_+$ 且 $m\leqslant n$) 个,按照一定的顺序排成一行,称为从 n 个不同元素中任意取出 m 个元素的一个排列.	从 n 个不同元素中,任取 m ($m,n\in\mathbf{N}_+$ 且 $m\leqslant n$) 个元素并成一组,称为从 n 个不同元素中任意取出 m 个元素的一个组合.
符号	从 n 个不同元素中取出 m ($m,n\in\mathbf{N}_+$ 且 $m\leqslant n$) 个元素的所有排列的个数,称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数,用符号 A_n^m 表示.	从 n 个不同元素中取出 m ($m,n\in\mathbf{N}_+$ 且 $m\leqslant n$) 个元素的所有组合的个数,称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数,用 C_n^m 表示.
公式	(1) 连乘形式 $A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$. (2) 阶乘形式 $A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$, 规定 $0!=1$. (3) 全排列数公式 $A_n^n=n!$.	—(1) $C_n^m=\frac{A_n^m}{A_n^m}=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$. (2) $C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$,规定 $C_n^0=1$.

