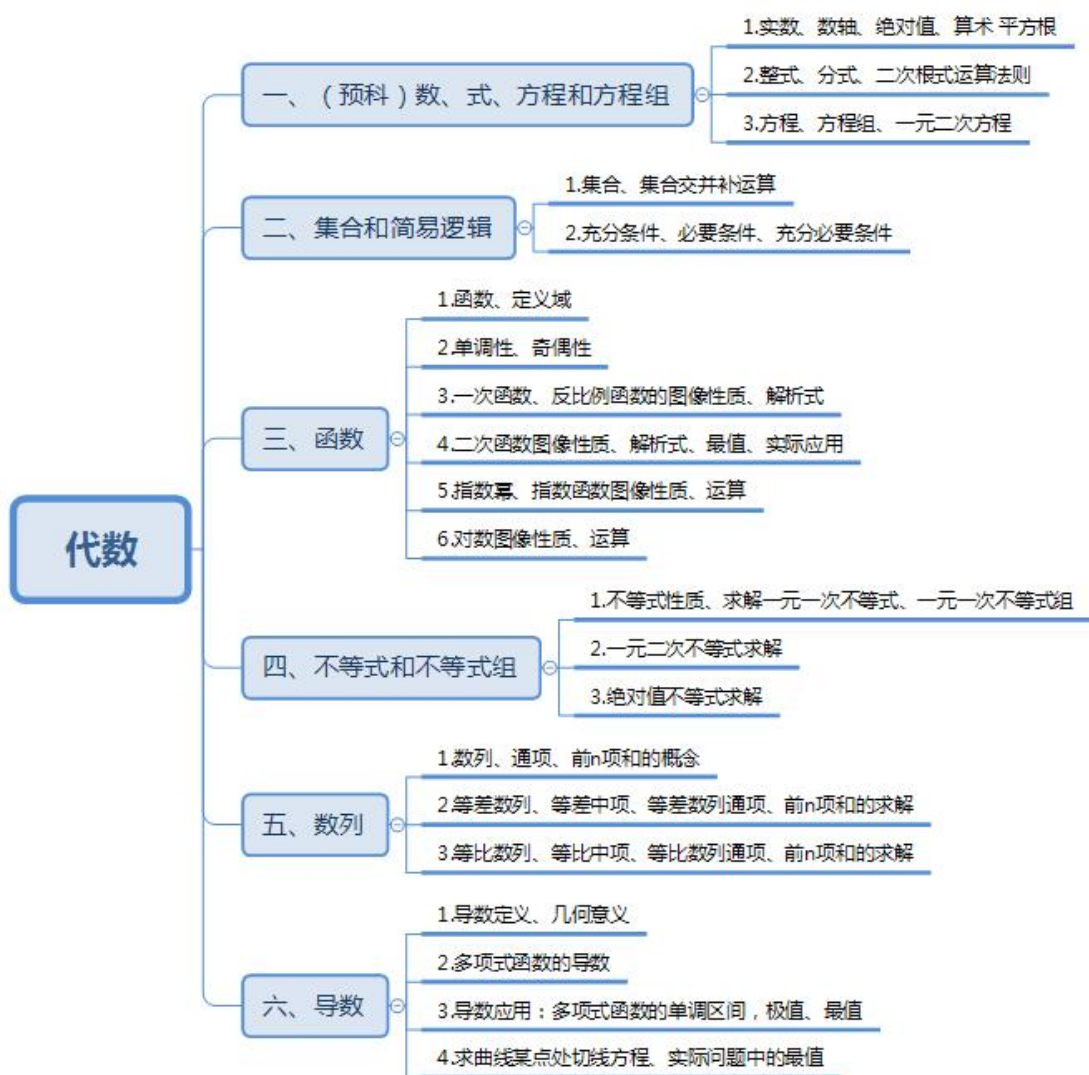




一、集合与简易逻辑

【考试大纲】

1、了解集合的意义及其表示方法；了解空集、全集、子集、交集、并集、补集的概念及其表示方法，了解符号 $\subseteq, \emptyset, =, \in, \notin$ 的含义，并能运用这些符号表示集合与集合、元素与集合的关系。

2、了解充分条件、必要条件、充分必要条件的概念。

1.常用的几种数集及记号

自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集
$N (0 \in N)$	N^+ 或 N_+	Z	Q	R

2.交集

由集合 A 与集合 B 的所有公共元素组成的集合叫做 A 与 B 的交集（如图 2-3 阴影部分所示），记作 $A \cap B$ ，读作 A 交 B 。

显然： $A \cap \emptyset = \emptyset$ ，
 $A \cap A = A$
 $A \cap B = B \cap A$ 。

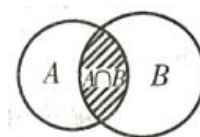


图 2-3

3.并集

由集合 A 与集合 B 的所有元素合并在一起（重复的只记一次）构成的集合，叫做 A 与 B 的并集（如图 2-4 阴影部分所示），记作 $A \cup B$ ，读作 A 并 B 。

显然： $A \cup A = A$ ， $A \cup \emptyset = A$ ， $A \cup B = B \cup A$ 。



图 2-4

4.补集

全集：在研究集合与集合之间的关系时，如果一些集合都是某一个给定集合的子集，那么称这个给定的集合为这些集合的全集，用符号 U 表示。

补集：已知全集 U ，集合 $A \subseteq U$ ，由 U 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做集合 A 在集合 U 中的补集（如图 2-5 中阴影部分），记作 $C_U A$ ，读 A 在 U 中的补集（或 $\overline{A}$ ）。



图 2-5

二、简易逻辑

任何一个数学命题都有条件和结论两部分，如果把条件和结论分别用 A 、 B 表示，那么命题可以写成“如果 A 成立，那么 B 成立”，或简写成“若 A ，则 B ”。

如果 A 成立，那么 B 成立，即 $A \Rightarrow B$ ，这时我们说条件 A 是 B 成立的**充分条件**。

如果 B 成立，那么 A 成立，即 $A \Leftarrow B$ ，这时我们说条件 A 是 B 成立的**必要条件**。

如果 A 既是 B 成立的充分条件，又是 B 成立的必要条件，即既有 $A \Rightarrow B$ ，又有 $B \Rightarrow A$ ，这时我们说条件 A 是 B 成立的充分必要条件，简称**充要条件**。

【例】三角形全等是三角形面积相等的（ ）

A.充分但不必要条件

B.必要但不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

【解析】要判断一个命题的条件是结论成立的什么条件，首先要分清楚命题的“条件”、“结论”，设它们分别为 P 、 Q ，然后再检查是否有 $P \Rightarrow Q$ 成立，或 $Q \Rightarrow P$ 成立。本题中 P 为“两个三角形全等”， Q 为“这两个三角形的面积相等”，显然 $P \Rightarrow Q$ 成立， $Q \Rightarrow P$ 不成立。所以选 A。

三、函数

【考试大纲】

- 1、了解**函数**概念，会求一些常见函数的**定义域**。
- 2、理解函数的**单调性**和**奇偶性**的概念，会判断一些常见函数的单调性和奇偶性。
- 3、理解**一次函数**、**反比例函数**的概念，掌握它们的图象和性质，会求它们的解析式。
- 4、理解**二次函数**的概念，掌握它的图象和性质以及函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 与 $y = ax^2 (a \neq 0)$ 的图象间的关系：会求二次函数的**解析式**及**最大值**或**最小值**，能运用二次函数的知识解决有关问题。
- 5、理解**分数指数幂**的概念，掌握有理指数幂的运算性质.掌握**指数函数**的概念、图像和性质。
- 6、理解**对数**的概念，掌握对数的**运算**性质.掌握**对数函数**的概念、图像和性质。

$$\begin{array}{l} \text{函数一} \left\{ \begin{array}{l} \text{反比例函数} \\ \text{一次函数} \\ \text{二次函数} \end{array} \right. \qquad \text{函数二} \left\{ \begin{array}{l} \text{指数函数} \\ \text{对数函数} \end{array} \right. \end{array}$$

1、函数的概念和性质

1.定义

如果在某变化过程中有两个变量 x, y ，并且对于 x 在某个范围内的每一个确定的值，按照某个对应法则， y 都有唯一确定的值和它对应，那么 y 就是 x 的函数， x 叫自变量， y 叫因变量，可以记作 $y = f(x)$ （其中 f 表示对应法则）。

2.定义域和值域

自变量 x 的取值范围叫函数的定义域，和 x 的值对应的 y 的值叫函数值，函数值的集合叫函数的值域。

【注】定义域、值域及对应法则称为**函数的三要素**。

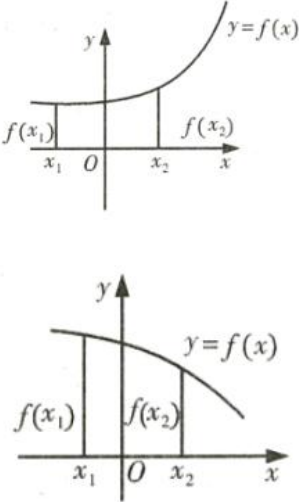
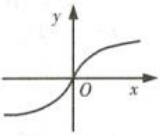
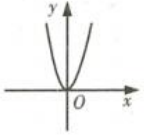
求函数定义域时有以下几个原则：

- (1) 当函数式为**分式**时，分式的分母不等于零；
- (2) 当函数式为**偶次根式**时，被开方数（或式）大于等于零；
- (3) 当函数式为**零次幂**时，底数不等于零；
- (4) 当函数式为**对数**时，真数大于零，底数大于零且不等于 1。

函数定义域有**两种表示方法**：集合法与区间法。

【注】以上几个原则是对常见的几种函数式来说的，对于不同的函数式还要采取不同的方法。

5.函数的性质

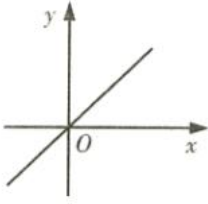
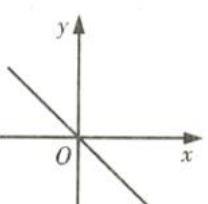
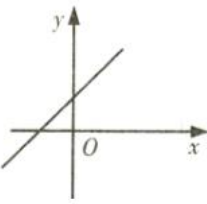
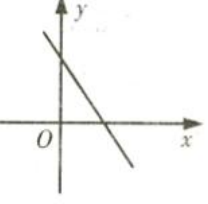
名称	定义	图示
单调性	设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 A，某个区间是 A 的子集. 如果对于这个区间上任意两个自变量的值 x_1, x_2，当 $x_1 < x_2$ 时， (1) 若都有 $f(x_1) < f(x_2)$，那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是增函数 (2) 若都有 $f(x_1) > f(x_2)$，那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是减函数. 如果函数 $y = f(x)$ 在某个区间上是增函数或减函数,就说 $f(x)$ 在这一区间上具有(严格的)单调性，这一区间就叫 $f(x)$ 的单调区间	
奇偶性	设函数 $f(x)$ 的定义域是 A，并且当任意的 $x \in A$ 时，也有 $-x \in A$ (1) 如果对于任何 $x \in A$，都有 $f(-x) = -f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就称为奇函数 (2) 如果对于任何 $x \in A$，都有 $f(-x) = f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就称为偶函数	(1) 奇函数的图像关于原点成中心对称图形（下图左）  (2) 偶函数的图像关于 y 轴成轴对称图形（上图右） 

【注】（1）奇、偶函数的定义域一定是关于原点对称的数集.

（2）周期性：对于函数 $y = f(x)$ ，如果存在一个非零常数 T ，使得当 x 取定义域内的每一个值时，都有 $f(x + T) = f(x)$ 成立，那么函数 $y = f(x)$ 称为周期函数，常数 T 称为这个函数的周期.周期函数的周期不止一个，如果在所有周期中存在一个最小正数，这个最小正数就称为函数的最小正周期.

若 $y = f(x)$ 的最小正周期为 T ，且存在常数 $\omega \neq 0$ ，则 $y = f(\omega x)$ 也是周期函数，且其最小正周期为 $\frac{T}{|\omega|}$.

1.正比例函数和一次函数

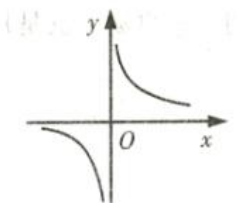
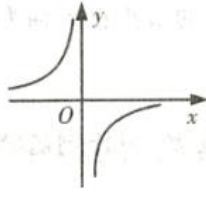
		正比例函数		一次函数	
解析式		$y=kx$ (k 为常数, 且 $k \neq 0$)		$y=kx+b$ (k, b 为常数, 且 $k \neq 0$)	
定义域		$x \in \mathbf{R}$		$x \in \mathbf{R}$	
值域		$y \in \mathbf{R}$		$y \in \mathbf{R}$	
图 像		$k>0$	$k<0$	$k>0$	$k<0$
					
		$ k $ 越大, 直线离 x 轴越远; $ k $ 越小, 直线离 x 轴越近		$ k $ 越大, 直线离经过 $(0,b)$ 点的 x 轴的平行线越远; $ k $ 越小, 直线离经过 $(0,b)$ 点的 x 轴的平行线越近	
		经过原点、斜率为 k 的直线		经过 $(0,b)$ 点, 斜率为 k 的直线	
性 质	单 调	在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数	在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数	在 $(-\infty, +\infty)$ 上是增函数	在 $(-\infty, +\infty)$ 上是减函数
	奇 偶	奇函数		非奇非偶函数	

【注】正比例函数 $y=kx$ 是一次函数 $y=kx+b$ 当 $b=0$ 时的特殊情形

2.反比例函数

解析式	$y = \frac{k}{x}$ (k 为不等于 0 的常数)
定义域	$\{x \mid x \in \mathbf{R}, \text{ 且 } x \neq 0\}$
值域	$\{y \mid y \in \mathbf{R}, \text{ 且 } y \neq 0\}$

(续表)

解析式		$y = \frac{k}{x}$ (k 为不等于 0 的常数)	
图 像		$k > 0$	$k < 0$
			
		$ k $ 越大, 两个分支离原点越远; $ k $ 越小, 两个分支离原点越近	
		以 x 轴、 y 轴为渐近线的等轴双曲线	
性 质	单 调 性	在区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 内是减函数	在区间 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 内是增函数
	奇 偶 性	奇函数	

三、二次函数

1.二次函数的定义

形如 $y = ax^2 + bx + c$ (其中 a, b, c 是常数, 且 $a \neq 0$) 的函数称为二次函数

2.函数 $y = ax^2$ ($a \neq 0$) 的图像和性质

函数 $y = ax^2$ 的图像是以原点为顶点, 以 y 轴为对称轴的抛物线.

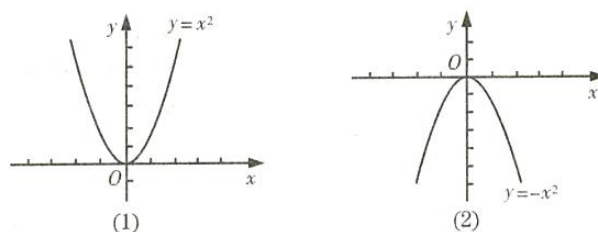


图 3-2

函数 $y = ax^2$ 有以下性质:

- (1) 抛物线 $y = ax^2$ 的顶点在原点, 对称轴为 y 轴.
- (2) 当 $a > 0$ 时, 抛物线 $y = ax^2$ 在 x 轴的上方 (顶点在原点), 它的图像开口向上, 并且向上无限伸展 (如图 3-2 (1)); 当 $a < 0$ 时, 抛物线 $y = ax^2$ 在 x 轴的下方 (顶点在原点), 它的图像开口向下, 并且向下无限伸展 (如图 3-2 (2)).
- (3) 当 $a > 0$ 时, 在对称轴的左侧, y 随着 x 的增大而减小; 在对称轴的右侧, y 随着 x 的增大而增大, 函数 y 在顶点处的值最小. 当 $a < 0$ 时, 在对称轴的左侧, y 随着 x 的增大而增大; 在对称轴的右侧, y 随着 x 的增大而减小, 函数 y 在顶点处的值最大.
- (4) $|a|$ 越大, 抛物线的开口越小; $|a|$ 越小, 抛物线的开口越大.

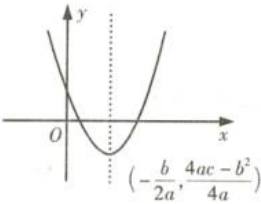
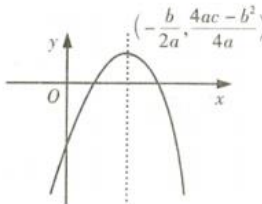
3. 函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图像和性质

一般地, 函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图像与函数 $y = ax^2 (a \neq 0)$ 的图像是形状相同的抛物线, 只是位置不同, 由于

$$y = ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left[x^2 + \frac{bx}{a} + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a},$$

所以, 它的图像可以通过 $y = ax^2$ 的图像平移而得到: 当 $\frac{b}{2a} > 0$ 时, 向左平移 $\left| \frac{b}{2a} \right|$ 个单位, 当 $\frac{b}{2a} < 0$ 时, 向右平移 $\left| \frac{b}{2a} \right|$ 个单位, 当 $\frac{4ac - b^2}{4a} > 0$ 时, 向上平移 $\left| \frac{4ac - b^2}{4a} \right|$ 个单位, 当 $\frac{4ac - b^2}{4a} < 0$ 时, 向下平移 $\left| \frac{4ac - b^2}{4a} \right|$ 个单位, 可得到 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图像.

函数 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图像和性质如下表:

	$a > 0$	$a < 0$
图 像		
开口方向	开口向上	开口向下
顶点坐标	$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$	
对称性	关于直线 $x = -\frac{b}{2a}$ 对称	
单调性	当 $x < -\frac{b}{2a}$ 时, 是减函数 当 $x > -\frac{b}{2a}$ 时, 是增函数	当 $x < -\frac{b}{2a}$ 时, 是增函数 当 $x > -\frac{b}{2a}$ 时, 是减函数
最大值与最小值	当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时 $y_{\text{最小值}} = \frac{4ac-b^2}{4a}$	当 $x = -\frac{b}{2a}$ 时 $y_{\text{最大值}} = \frac{4ac-b^2}{4a}$

第二节 函数（二）

一、指数

1. 基本概念

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_n$$

(1) 正整数指数幂: $(n \in \mathbb{N} \text{ 且 } n > 1)$, 其中 a 叫底数, n 叫指数, a^n 叫幂.

(2) 零指数幂: $a^0 = 1 (a \neq 0)$.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} (a \neq 0, n \in \mathbb{N})$$

(3) 负整数指数幂:

(4) 根式与有理数指数幂

n 次方根: 若 $x^n = a (n \in \mathbb{N} \text{ 且 } n > 1)$, 则 x 叫做 a 的 n 次方根.

算术根: 正数 a 的正的 n 次方根, 叫做 a 的 n 次算术根.

根式: 当 $\sqrt[n]{a}$ 有意义时, 式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做根式.

正分数指数幂: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} (a \geq 0, m, n \in \mathbb{N} \text{ 且 } n > 1, \frac{m}{n} \text{ 为既约分数})$.

负分数指数幂: $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ ($a > 0, m, n \in \mathbf{N}$ 且 $n > 1, \frac{m}{n}$ 为既约分数)

整数指数幂、分数指数幂, 统称为有理数指数幂.

【注】当 p 是一个无理数且 $a > 0$ 时, a^p 是一个确定的实数.

2. 幂的运算法则

- (1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
- (2) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ ($a \neq 0$);
- (3) $(a^m)^n = a^{mn}$;
- (4) $(ab)^n = a^n b^n$;
- (5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} = a^n \cdot b^{-n}$ ($b \neq 0$).

【注】一般情况下, 把根式的乘、除、乘方、开方运算化为分数、指数幂运算比较简便

二、对数

1. 对数的概念

如果 $a^b = N$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$), 那么 b 叫做以 a 为底 N 的对数, 记作 $\log_a N = b$, 其中 a 叫做底数, N 叫做真数.

2. 指数式与对数式的互化 (如图 3-4)

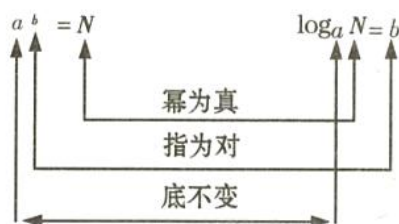


图 3-4

3. 性质

- (1) 底的对数等于 1, $\log_a a = 1$.
- (2) 1 的对数等于 0, $\log_a 1 = 0$
- (3) 零和负数无对数
- (4) 对数恒等式: $a^{\log_a N} = N$ ($N > 0$).

(5) 当底数大于 1 时, 大于 1 的真数的对数为正, 大于 0 小于 1 的真数的对数为负; 当底数小于而大于零时, 小于 1 而大于零的真数的对数为正, 大于 1 的真数的对数为负.

4. 运算法则

- (1) $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$ ($M > 0, N > 0$).
- (2) $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$ ($M > 0, N > 0$).
- (3) $\log_a M^n = n \log_a M$ ($M > 0$).
- (4) $\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M$ ($M > 0, n \in \mathbf{N}$ 且 $n > 1$).

【注】以上公式中 $a > 0$, 且 $a \neq 1$

5.换底公式

log_a N = (log_b N) / (log_b a)

在对数的计算中，我们可以用此公式把一个对数换成需要的底数，从而简化运算.

【注】 log_a b · log_b a = 1; log_a N = log_{a^2} N^2 = log_{\sqrt{a}} \sqrt{N}; log_{a^n} N^m = (m/n) log_a N (其中 a > 0, a ≠ 1, b > 0, b ≠ 1, N > 0)

6.常用对数

- (1) 定义：以 10 为底的对数，叫做常用对数.
- (2) 表示方法：用 lg N 来表示 log_{10} N .
- (3) 常用对数具有对数的一切性质.

7.自然对数

- (1) 定义：以 e 为底的对数叫做自然对数.
- (2) 表示方法：用 ln N 表示 log_e N .
- (3) 自然对数具有对数的一切性质.

三、指数函数和对数函数

指数函数和对数函数的函数式、定义域、图像与性质如下表所示：

		指数函数	对数函数
函数式		$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$	$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$
定义域		$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$
图 像			
性 质	1	$y > 0$ (图像在 x 轴上方)	$x > 0$ (图像在 y 轴右方)
	2	$a^0 = 1$ (图像过 $(0,1)$ 点)	$\log_a 1 = 0$ (图像过 $(1,0)$ 点)
		$a > 1$ 时, $a^x \begin{cases} > 1 (x > 0) \\ = 1 (x = 0) \\ < 1 (x < 0) \end{cases}$ $0 < a < 1$ 时, $a^x \begin{cases} < 1 (x > 0) \\ = 1 (x = 0) \\ > 1 (x < 0) \end{cases}$	$a > 1$ 时, $\log_a x \begin{cases} > 0 (x > 1) \\ = 0 (x = 1) \\ < 0 (0 < x < 1) \end{cases}$ $0 < a < 1$ 时, $\log_a x \begin{cases} < 0 (x > 1) \\ = 0 (x = 1) \\ > 0 (0 < x < 1) \end{cases}$
	4	$a > 1$ 时, a^x 是增函数; $0 < a < 1$ 时, a^x 是减函数	$a > 1$ 时, $\log_a x$ 是增函数; $0 < a < 1$ 时, $\log_a x$ 是减函数
	5	$a > 1$ 时, 底数越大, 函数图像越靠近 y 轴; $0 < a < 1$ 时, 底数越小, 函数图像越靠近 y 轴	$a > 1$ 时, 底数越大, 函数图像越靠近 x 轴; $0 < a < 1$ 时, 底数越小, 函数图像越靠近 x 轴

四、不等式和不等式组

【考试大纲】

- 1、了解不等式的性质；会解一元一次不等式、一元一次不等式组和可化为一元一次不等式组的不等式，会解一元二次不等式；会表示不等式或不等式组的解集.
- 2、会解形如 $|ax+b| \geq c$ 和 $|ax+b| \leq c$ 的绝对值不等式.

一、不等式的概念

1.不等式

表示两个量之间大小关系的符号叫做不等号.用不等号“ $<$ ”（小于），“ $>$ ”（大于），“ $\leq$ ”（小于等于），“ $\geq$ ”（大于等于）把两个算式连接起来的式子叫做不等式.

用“ $>$ ”或“ $<$ ”连接的不等式称为严格不等式；用“ $\leq$ ”或“ $\geq$ ”连接的不等式称为非严格不等式.

2.不等式的分类

- (1) 条件不等式：如 $x^2 - 2x - 3 \leq 0$ ，当 $-1 \leq x \leq 3$ 时此不等式才能成立
- (2) 绝对不等式：如 $2x^2 + 1 > 0$ ，此不等式对于任何实数 x 都成立
- (3) 矛盾不等式：如 $4x^2 + 4x + 1 < 0$ ，此不等式对于任何实数 x 都不能成立.

二、不等式的性质

如果 $a > b$ ，那么 $b < a$ ；如果 $a < b$ ，那么 $b > a$ ；

如果 $a > b, b > c$ ，那么 $a > c$ ；

如果 $a > b$ ，那么 $a + c > b + c$ ；

如果 $a > b, c > 0$ ，那么 $ac > bc$ ；如果 $a > b, c < 0$ ，那么 $ac < bc$ ；

如果 $a > b, c > d$ ，那么 $a + c > b + d$ ；

如果 $a > b > 0, c > d > 0$ ，那么 $ac > bd$ ；

如果 $a > b, ab > 0$ ，则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ；

如果 $a > b > 0$ ，那么 $a^n > b^n (n \in \mathbf{N}, n > 1)$ ；

如果 $a > b > 0$ ，那么 $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} (n \in \mathbf{N}, n > 1)$ ；

$|a + b| \leq |a| + |b|$ ($a, b \in \mathbf{R}$ ，且当 a, b 同号时取等号).

以上几条不等式的性质是证明不等式和解不等式的基础.在复习时要特别注意性质成立的条件，只有符合条件，才能用来证明不等式和解不等式.

三、基本不等式

1.如果 $a \in \mathbf{R}$ ，那么 $a^2 \geq 0$ （当且仅当 $a=0$ 时取“ $=$ ”）.

2.如果 $a, b \in \mathbf{R}$ ，那么 $a^2 + b^2 \geq 2ab$ （当且仅当 $a=b$ 时取“ $=$ ”）.

3.如果 $a, b \in R$ ，且 $a \geq 0, b \geq 0$ ，那么 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ （当且仅当 $a=b$ 时取“=”），此式常称为均值定理.

若 $a+b$ 为定值，当 $a=b$ 时， ab 的值最大；若 ab 为定值，当 $a=b$ 时， $a+b$ 的值最小.

4.若 $a > 0$ ，则 $a + \frac{1}{a} \geq 2$ （当且仅当 $a=1$ 时取“=”）.

四、解不等式

一个含有未知数的不等式中，能使不等式成立的未知数的所有可取值的集合称为不等式的解集.求不等式解集或证明不等式无解的过程叫解不等式.

五、同解不等式及同解变形

若两个不等式的解集相同，则把这两个不等式叫做同解不等式.使一个不等式变为另一个与它同解的不等式的过程叫做同解变形.

六、同解原理

1.不等式的两边都加上（或都减去）同一个数或同一个整式，所得的不等式与原不等式是同解不等式.

2.不等式两边同乘以（或除以）同一个正数，所得的不等式与原不等式是同解不等式.

3.不等式两边同乘以（或除以）同一个负数，不等号的方向改变后，所得的不等式与原不等式是同解不等式.

七、一元一次不等式

1.定义：只含有一个未知数且未知数的次数是1，系数不等于零的不等式叫一元一次不等式，一般形式为 $ax > b (a \neq 0)$.

2.解的情况可分为以下两种类型：

(1) 当 $a \neq 0$ 时，若 $a > 0$ ，则 $ax > b$ 的解集为 $\left\{ x \mid x > \frac{b}{a} \right\}$ ；若 $a < 0$ ，则 $ax > b$ 的解集为 $\left\{ x \mid x < \frac{b}{a} \right\}$.

(2) 当 $a=0$ 时，若 $b \geq 0$ ，则 $ax > b$ 无解，即解集为 $\emptyset$ ；若 $b < 0$ ，则 $ax > b$ 的解集为全体实数，即解的集合为 R .

形如 $ax < b$ 的不等式与上面的情况类似.

八、一元一次不等式组

1.定义：由几个一元一次不等式组成的不等式组叫做一元一次不等式组，这几个不等式解集的交集叫做这个不等式组的解集.

2.由两个一元一次不等式所组成的不等式组的解集可以归结为以下四种类型

类型 (设 $a < b$)	解集	数轴表示
$\begin{cases} x > a \\ x > b \end{cases}$	$x > b$	

$\begin{cases} x < a \\ x < b \end{cases}$	$x < a$	
$\begin{cases} x > a \\ x < b \end{cases}$	$a < x < b$	
$\begin{cases} x < a \\ x > b \end{cases}$	空集	

九、可化为一元一次不等式组求解的两类不等式

1. 不等式 $(ax+b)(cx+d) > 0$ 及 $\frac{ax+b}{cx+d} > 0$ 型的解法

上面两个不等式均可化成如下两个不等式组：

$$\begin{cases} ax+b > 0 \\ cx+d > 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} ax+b < 0 \\ cx+d < 0 \end{cases},$$

即不等式 $(ax+b)(cx+d) > 0$ 或 $\frac{ax+b}{cx+d} > 0$ 的解集，就是以上两个不等式组解集的并集。

2. 不等式 $(ax+b)(cx+d) < 0$ 及 $\frac{ax+b}{cx+d} < 0$ 型的解法

上面两个不等式均可化为如下两个不等式组：

$$\begin{cases} ax+b > 0 \\ cx+d < 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} ax+b < 0 \\ cx+d > 0 \end{cases},$$

同样，不等式 $(ax+b)(cx+d) < 0$ 或 $\frac{ax+b}{cx+d} < 0$ 的解集，就是以上两个不等式组解集的并集。

十、一元二次不等式

1. 定义：只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的不等式，叫做一元二次不等式。

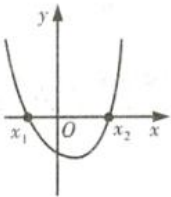
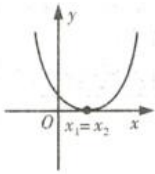
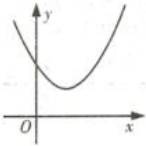
一般形式为 $ax^2 + bx + c > 0$ 或 $ax^2 + bx + c < 0 (a > 0)$ 。

2. 解法：常用的有以下两种方法

(1) 因式分解法：当二次三项式 $ax^2 + bx + c$ 容易分解为两个一次因式的乘积时，可以把一元二次不等式化为两个一元一次不等式组求解。两个不等式组的解集的并集就为一元二次不等式的解集。

【注】上表内规定了 $a > 0$ ，当 $a < 0$ 时只需将不等式两边同乘以 -1，并把不等号改变方向，就可化为表内类型。

(2) 图像法：利用一元二次不等式与相应的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 与二次函数 $y = ax^2 + bx + c (a > 0)$ 的有关性质求解，解集情况如下表：

判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 的图像			
一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0$) 的根	有两个不相等的实根 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$	有两个相等的实根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	没有实根
$ax^2 + bx + c > 0$ ($a > 0$) 的解集	$\{x x < x_1 \text{ 或 } x > x_2\}$ 即 $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$	$\left\{x x \in \mathbf{R}, x \neq -\frac{b}{2a}\right\}$ 即 $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right) \cup \left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$	$\mathbf{R}$ 即 $(-\infty, +\infty)$
$ax^2 + bx + c < 0$ ($a > 0$) 的解集	$\{x x_1 < x < x_2\}$ 即 (x_1, x_2)	$\emptyset$	$\emptyset$

【注】上表规定了 $a > 0$ ，当 $a < 0$ 时，只需将不等式两边同乘以 -1，并把不等号改变方向，就可化为表内类型。

十一、绝对值不等式

1. 定义：含有绝对值符号，并且绝对值符号内含有未知数的不等式叫做绝对值不等式。

2. 绝对值的性质：设两实数 a, b ，则有

(1) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;

(2) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} (b \neq 0)$;

(3) $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$.

【注】 $|a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \geq 0$;

$$|a-b|=|a|+|b|\Leftrightarrow ab\leq 0;$$

$$|a+b|=||a|-|b||\Leftrightarrow ab\leq 0;$$

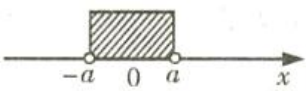
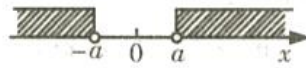
$$|a-b|=||a|-|b||\Leftrightarrow ab\geq 0.$$

由绝对值的定义和不等式的性质，有下述等价关系成立：

$$|x|<a\Leftrightarrow x^2<a^2\Leftrightarrow -a<x<a.$$

$$|x|>a\Leftrightarrow x^2>a^2\Leftrightarrow x>a\text{ 或 }x<-a\text{ (其中 }a>0\text{)}$$

3.绝对值不等式的解法可归结为两种基本类型：

类型（设 $a>0$ ）	解集	数轴表示
$ x <a$	$\{x -a<x<a\}$	
$ x >a$	$\{x x>a\text{ 或 }x<-a\}$	

【注】当 $a\leq 0$ 时， $|x|<a$ 无解， $|x|>a$ 的解为全体实数.

十二、关于区间的概念

设 a, b 是两个实数且 $a<b$ ，则：

- 1.把满足 $a<x<b$ 的实数 x 的集合 $\{x|a<x<b\}$ 称为开区间，表示为 (a, b) ；
- 2.把满足 $a\leq x\leq b$ 的实数 x 的集合 $\{x|a\leq x\leq b\}$ 称为闭区间，表示为 $[a, b]$ ；
- 3.把满足 $a\leq x<b$ 或 $a<x\leq b$ 的实数 x 的集合 $\{x|a\leq x<b\}$ 或 $\{x|a<x\leq b\}$ 称为半开半闭区间，表示为 $[a, b)$ 或 $(a, b]$ ；
- 4.特殊地：“ $+\infty$ ”（正无穷大），“ $-\infty$ ”（负无穷大）（注：“ ∞ ”只是一个记号）
 - （1）实数集 R 可表示为 $(-\infty, +\infty)$
 - （2）把满足 $x\geq a, x>a, x\leq b, x<b$ 的实数 x 的集合表示为 $[a, +\infty), (a, +\infty), (-\infty, b], (-\infty, b)$ 。

五、 数列

【考试大纲】

- 1、了解数列及其通项、前 n 项和的概念.
- 2、理解等差数列、等差中项的概念, 会运用等差数列的通项公式、前 n 项和公式解决有关问题.
- 3、理解等比数列、等比中项的概念, 会运用等比数列的通项公式前 n 项和公式解决有关问题.

一、数列的概念

1.数列的定义及表示方法

按照一定次序排列的一列数叫做数列, 数列里的每一个数叫做这个数列的一项, 各项依次叫做这个数列的第1项, 第2项, $\dots$, 第 n 项, $\dots$, 第1项也叫做首项.

通常用带数字下标的字母来表示数列的项, 于是数列的一般形式可以写成 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 其中 a_n 是数列的第 n 项.有时也把数列简单记为 $\{a_n\}$.

例如, 数列

$$2, 4, 6, \dots, 2n, \dots$$

第1项是2, 第2项是4, 第3项是6, $\dots$, 第 n 项是 $2n$, 可以简记为数列 $\{2n\}$.

2.数列的通项公式

一个数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与项数 n 的关系, 如果可以用一个公式来表示, 这个公式就叫做这个数列的通项公式.

例如, 数列

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}$$

通项公式是 $a_n = \frac{1}{2^n}$

(1) 知道一个数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 就可以依次用 $1, 2, 3, \dots$ 代替公式里的 n , 求出这个数列的各项.例如, 已知一个数列的通项公式 $a_n = n^2$, 那么依次用 $1, 2, 3, \dots, n$ 代替公式里的 n , 就得到数列 $1, 4, 9, \dots, n^2$

(2) 并不是所有的数列都有通项公式.

3.数列的前 n 项和

(1) 数列的前 n 项和一般用 S_n 表示, 即 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

(2) 已知 S_n 求 a_n 时可用公式:
$$a_n = \begin{cases} S_1, & n=1 \\ S_n - S_{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$$

4.数列的分类

按照数列的项数是有限还是无限，可以分为有穷数列和无穷数列.

二、等差数列与等比数列

	等差数列	等比数列
定义	如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的差等于同一个常数，这个数列就叫做等差数列，这个常数叫做等差数列的公差，公差常用字母 d 表示， $d = a_{n+1} - a_n$	如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的比等于同一个常数，这个数列就叫做等比数列，这个常数叫做等比数列的公比，公比常用字母 q 表示， $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} (q \neq 0)$
一般形式	$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \cdots, a_1 + (n-1)d, \cdots$	$a_1, a_1q, a_1q^2, \cdots, a_1q^{n-1}, \cdots$
通项公式	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1q^{n-1}$
中项	如果 a, A, b 成等差数列，那么 A 叫做 a 和 b 的等差中项且 $A = \frac{a+b}{2}$ 或 $a+b=2A$	如果 a, G, b 成等比数列，那么 G 叫做 a 和 b 的等比中项，且 $G^2 = ab$ 或 $G = \pm\sqrt{ab}$
前 n 项和公式	$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ $\text{或 } S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$	$\text{当 } q=1 \text{ 时, } S_n = na_1$ $\text{当 } q \neq 1 \text{ 时, } S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ $\text{或 } S_n = \frac{a_1 - a_nq}{1-q}$

(续表)

性质	如果 $m+n=p+q$, 则 $a_m + a_n = a_p + a_q$ $S_{2n-1} = (2n-1) \cdot a_n$ $a_m = a_n + (m-n)d$ 当项数为 $2n$ 时, $\frac{S_{\text{偶}}}{S_{\text{奇}}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ $S_{\text{偶}} - S_{\text{奇}} = n \cdot d$ 当项数为 $2n-1$ 时, $\frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} = \frac{n}{n-1}$ $S_{\text{奇}} - S_{\text{偶}} = a_n$	如果 $m+n=p+q$ 则 $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$ 其中的 $m, n, p, q \in \mathbf{N}$ 当总项数为 $2n$ 时, $S_{\text{偶}} = S_{\text{奇}} \cdot q$ 其中数列 $\{a_n\}$ 的奇数项之和为 $S_{\text{奇}}$ 偶数项之和为 $S_{\text{偶}}$
----	--	---

【注】求解与数列有关的问题时，常用到性质中的公式.



七、三角函数及其有关概念

【考试大纲】

- 1、了解任意角的概念，理解象限角和终边相同的角的概念.
- 2、了解弧度的概念，会进行弧度与角度的换算.
- 3、理解任意角三角函数的概念，了解三角函数在各象限的符号和特殊角的三角函数值.

一、角的有关概念

1.正角、负角和零角

角可以看做是一条射线绕着它的端点在平面内旋转而成的，射线的端点叫做角的顶点.旋转开始时的射线叫做角的始边，终止时的射线叫做角的终边.

角的形成带有方向性.按逆时针方向旋转形成的角叫做正角；按顺时针方向旋转形成的角叫做负角；当射线没有作任何旋转时，所形成的角叫做零角.

2.终边相同的角

如果角 α 与角 β 的顶点与顶点重合，始边与始边重合以后，它们的终边也重合，那么角 α 与角 β 称为终边相同的角.

所有与 α 角的终边相同的角，连同 α 角在内，有无限多个，可以用 $k \cdot 360^\circ + \alpha, k \in \mathbf{Z}$ 表示.于是 α 终边相同的角的集合可记作 $\{\beta \mid \beta = k \cdot 360^\circ + \alpha, k \in \mathbf{Z}\}$.

【注】一条射线绕着它的端点按逆时针方向旋转一周，与旋转开始时的射线重合所形成的角叫做1周角.

3.象限角

角的顶点与原点重合，角的始边与 x 轴正方向重合，终边落在哪个象限内，这个角就叫做哪个象限的角（或称这个角属于第几象限）.

若 α 为第I象限的角，则 $2k\pi < \alpha < 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ ；

若 α 为第II象限的角，则 $2k\pi + \frac{\pi}{2} < \alpha < (2k+1)\pi (k \in \mathbf{Z})$

若 α 为第III象限的角，则 $(2k+1)\pi < \alpha < (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ ；

若 α 为第IV象限的角，则 $(2k+1)\pi + \frac{\pi}{2} < \alpha < 2(k+1)\pi (k \in \mathbf{Z})$.（ π 的概念在角的度量中）

【注】终边落在坐标轴上的角，不属于任何象限.

二、角的度量

1.角度制

1 周角的 $\frac{1}{360}$ 叫做 1 度的角，用度作单位来度量角的大小的制度，叫做角度制。

2.弧度制

等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角，用弧度作量角单位的制度。

我们规定：正角的弧度数为正数，负角的弧度数为负数，零角的弧度数为零，并且有

$$|\alpha| = \frac{l}{r} \quad \text{①},$$

其中 α 为已知角的弧度数，为角 α 作为圆心角所对的圆弧长， r 为圆的半径。

由①式，我们可得计算弧长的公式

$$l = |\alpha| r$$

3.角度与弧度之间的换算关系

$$360^\circ = 2\pi \text{ 弧度}, \quad 180^\circ = \pi \text{ 弧度}$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ 弧度} = 0.017453 \text{ 弧度}$$

$$1 \text{ 弧度} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.30^\circ = 57^\circ 18'.$$

4.某些特殊的角度与弧度之间的对应关系

度	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

【注】 $\frac{\pi}{4}$ 表示 $\frac{\pi}{4}$ 弧度，单位弧度常常省略不写。

三、任意角的三角函数

1.定义

设 α 是一个任意大小的角，角 α 终边上任意一点 P 的坐标是 (x, y) ，它与原点的距离是 $r (r > 0)$ 如图 7-1 (1))，那么角 α 的六个三角函数定义如下：

$$\text{正弦函数} \quad \sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \text{余弦函数} \quad \cos \alpha = \frac{x}{r},$$

$$\text{正切函数} \quad \tan \alpha = \frac{y}{x}, \quad \text{余切函数} \quad \cot \alpha = \frac{x}{y},$$

$$\text{正割函数} \quad \sec \alpha = \frac{r}{x}, \quad \text{余割函数} \quad \csc \alpha = \frac{r}{y}.$$

2.任意角三角函数值在各象限的符号（如图 7-1（2））

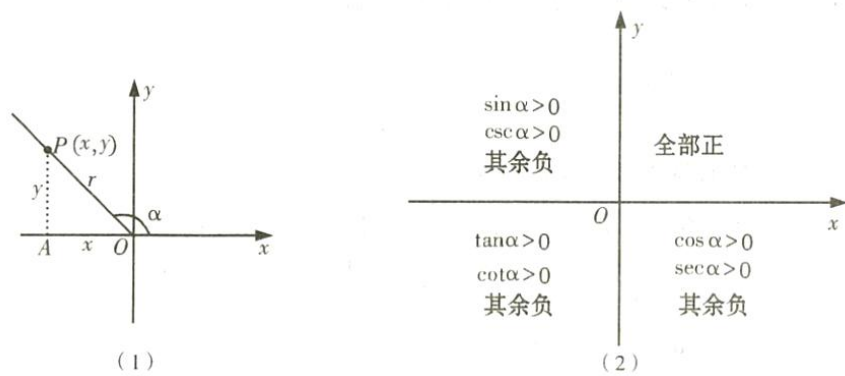


图 7-1

*三角函数的正值歌：

正弦一二全是正
余弦偏在一四中
正切余切却不然
斜插一三两象限
正割随余弦
余割随正弦

3.特殊角的三角函数值

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
角 α 的弧度数	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{\pi}{6}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	0	不存在	0
$\cot \alpha$	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	不存在	0	不存在

八、三角函数式的变换

【考试大纲】

- 1、掌握同角三角函数间的基本关系式、诱导公式，会运用它们进行计算、化简和证明.
- 2、了解两角和、两角差、二倍角的正弦、余弦、正切的公式，会用它们进行计算、化简和证明.

一、同角三角函数的基本关系式

倒数关系	$\sin \alpha \cdot \csc \alpha = 1 \quad \cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1 \quad \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$
商数关系	$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$
平方关系	$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad 1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha \quad 1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$

【注】以上公式当且仅当 α 的值使其两边都有意义时成立，公式中 α 既可以是常数，也可以是变量，既可以是单变量，也可以是复变量，例如： $\sin^2(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) = 1$.

解题中，要特别注意平方关系，根据角所在的象限，正确选取正、负号.

例如： α 在第二、三象限时， $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ ；

α 在第一、四象限时， $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$.

二、三角函数的诱导公式

1. $k \cdot 360^\circ + \alpha (k \in \mathbb{Z})$, $-\alpha$, $180^\circ \pm \alpha$, $360^\circ - \alpha$ 的三角函数值等于 α 的同名三角函数值，前面加上一个把 α 看成锐角时原函数值的符号.简而言之，“函数名不变，符号看象限”.

诱导公式可列表如下

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
$-\alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\tan \alpha$	$-\cot \alpha$
$180^\circ - \alpha$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\tan \alpha$	$-\cot \alpha$
$180^\circ + \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
$360^\circ - \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$-\tan \alpha$	$-\cot \alpha$
$k \cdot 360^\circ + \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$

2. $90^\circ \pm \alpha, 270^\circ \pm \alpha$ 的三角函数值等于 α 相应余函数的值前面加上一个把 α 看成锐角时原函数值的符号. 简而言之, “函数名改变 (变为它的余函数), 符号看象限”.

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
$90^\circ - \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\cot \alpha$	$\tan \alpha$
$90^\circ + \alpha$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cot \alpha$	$-\tan \alpha$
$270^\circ - \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cot \alpha$	$\tan \alpha$
$270^\circ + \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\cot \alpha$	$-\tan \alpha$

【注】(1) 诱导公式沟通了各个象限之间角的三角函数值关系. 在应用诱导公式时, 无论 α 是怎样的角, 都要把它看作锐角 $180^\circ - \alpha$, $180^\circ + \alpha$, $360^\circ - \alpha$ 就分别看做是第二象限、第三象限、第四象限的角. (2) 利用诱导公式, 可把任意角的三角函数化为 $0^\circ \sim 90^\circ$ 之间的角的三角函数.

三、两角和与两角差的三角函数

$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$ ↓ 相除 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$	$\xleftrightarrow{\text{以 } -\beta \text{ 代替 } \beta}$	$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$ ↓ 相除 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$
---	--	---

四、倍角公式

令 $\beta = \alpha$	$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ \tan 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}\end{aligned}$
-----------------------	---

【注】1. 使用公式时, 应注意: (1) 公式成立的条件, 如 $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}\right)$ 只能用诱导公式化简得 $-\cot \frac{\pi}{10}$, 而不能使用两角和的正切公式; (2) 公式的逆向使用和变换使用, 如

$$\cos 15^\circ \cos 105^\circ - \sin 15^\circ \sin 105^\circ = \cos(15^\circ + 105^\circ) = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2},$$

$$\tan \alpha \pm \tan \beta = \tan(\alpha \pm \beta)(1 \mp \tan \alpha \tan \beta).$$

2 在使用倍角公式时, 应注意以下几点: (1) 对倍角概念作广义理解, 如 4α 是 2α 的二

倍, $\frac{x+y}{2}$ 是 $\frac{x+y}{4}$ 的二倍; (2) 重视公式的变形使用, 由倍角余弦公式变形, 可得到降幂公式: $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$, $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$; (3) 注意公式的逆向使用.

3. 以上公式的记忆方法应以两角和与两角差的正、余弦公式为基础, 对公式的异同进行比较, 增强记忆、掌握, 以便灵活运用.

九、三角函数的图像和性质

【考试大纲】

- 1、掌握正弦函数、余弦函数的图象和性质, 会用这两个函数的性质 (定义域、值域、周期性、奇偶性和单调性) 解决有关问题.
- 2、了解正切函数的图象和性质.
- 3、会求函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的周期、最大值和最小值.
- 4、会由已知三角函数值求角、了解符号 $\arcsin x, \arccos x, \arctan x$ 表示.

一、正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数的图像

1. 正弦函数的图像 (如图 9-1)

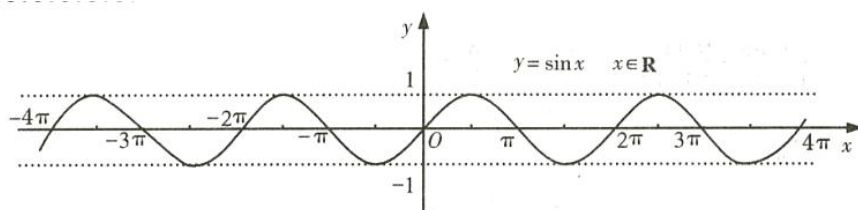


图 9-1

2. 余弦函数的图像 (如图 9-2)

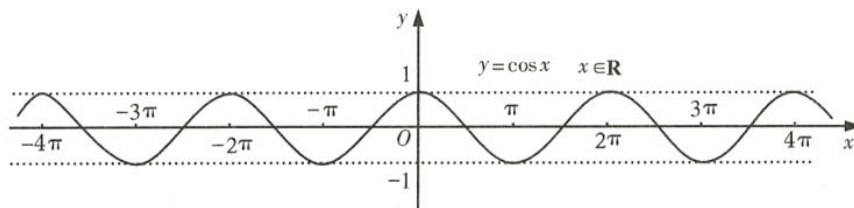


图 9-2

3.正切函数的图像（如图 9-3）

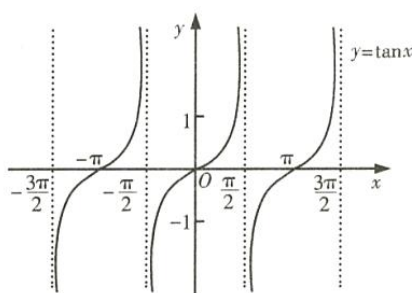


图 9-3

4.余切函数的图像（如图 9-4）

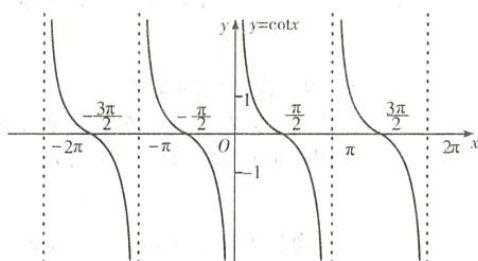


图 9-4

二、用“五点法”画正弦函数和余弦函数的简图

从正弦函数的图像和余弦函数的图像可以看出, 正弦函数 $y = \sin x, x \in [0, 2\pi]$ 的图像由以下五个特殊点 $(0, 0), (\frac{\pi}{2}, 1), (\pi, 0), (\frac{3\pi}{2}, -1), (2\pi, 0)$ 描出后, 其形状就基本确定了.

因此在精确度要求不太高时, 常先描出这五个点, 再用光滑曲线将它们连结起来, 从而得到正弦函数在这个区间的简图. 类似地可用这种“五点法”画出余弦函数 $y = \cos x, x \in [0, 2\pi]$ 的简图.

三、正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数的性质

函数	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$	$y = \cot x$
定义域	R	R	$\{ x \mid x \in R \text{ 且 } x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z \}$	$\{ x \mid x \in R \text{ 且 } x \neq k\pi, k \in Z \}$
值域	$[-1, 1]$ 最大值为 1, 最小值为 -1	$[-1, 1]$ 最大值为 1, 最小值为 -1	R 函数无最大值、最小值	R 函数无最大值、最小值
周期性	周期为 2π	周期为 2π	周期为 π	周期为 π

单 调 性	在 $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ 上是增函数; 在 $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$ 上是减函数($k \in \mathbb{Z}$)	在 $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ 上是增函数; 在 $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ 上是减函数($k \in \mathbb{Z}$)	在 $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ 内是增函数($k \in \mathbb{Z}$)	在 $(k\pi, (k+1)\pi)$ 内是减函数($k \in \mathbb{Z}$)
奇 偶 性	奇函数	偶函数	奇函数	奇函数

【注】1.如果存在一个不为零的常数 T , 使得函数 $y=f(x)$ 定义域内的每一个值 x , 都有 $f(x+T)=f(x)$ 成立, 就把函数 $y=f(x)$ 叫做周期函数, T 叫做这个函数的一个周期。如果在一个周期函数的所有周期中存在一个最小的正数, 就把这个最小的正数叫做最小正周期。通常在没有特别声明时, 我们所说的函数的周期就是指它的最小正周期。

函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ (其中 A, ω, φ 为常数, 且 $A \neq 0, \omega > 0, x \in \mathbf{R}$) 的周期 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$, 最大值为 $|A|$, 最小值为 $-|A|$ 。

2. $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像与 $y=\sin x$ 的图像之间的关系.

(1) $y=\sin(x+\varphi)$ 的图像是由 $y=\sin x$ 的图像向左 ($\varphi > 0$) 或向右 ($\varphi < 0$) 平移 $|\varphi|$ 个单位而得到的.

(2) $y=A\sin x$ 的图像是由 $y=\sin x$ 的图像的振幅扩大 ($|A| > 1$) $|A|$ 倍或振幅缩小 ($|A| < 1$) $|A|$ 而得到的

(3) $y=\sin \omega x$ 的图像是由 $y=\sin x$ 的图像的周期扩大 ($|\omega| < 1, \omega \neq 0$) $\frac{1}{|\omega|}$ 倍或缩小 ($|\omega| > 1$) $\frac{1}{|\omega|}$ 而得到的.

(4) $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图像是由 $y=\sin x$ 的图像向左或右平移 $\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$ 个单位, 周期扩大 $\frac{1}{|\omega|}$ 倍或缩小 $\frac{1}{|\omega|}$ 和振幅扩大 $|A|$ 倍或缩小 $|A|$ 而得到的. 图像的平移、周期和振幅的扩大或缩小都要依据 φ 、 ω 、 A 的符号和大小而定.

(5) $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的画法:

用五点法可以画出 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的简图.

四、已知三角函数值求角

在 $y = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 中, 若已知其函数值 y , 则角 $x = \arcsin y, y \in [-1, 1]$.

在 $y = \cos x, x \in [0, \pi]$ 中, 若已知其函数值 y 则角 $x = \arccos y, y \in [-1, 1]$.

在 $y = \tan x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 中, 若已知其函数值 y , 则角 $x = \arctan y, y \in \mathbf{R}$.

在 $y = \cot x, x \in (0, \pi)$ 中, 若已知其函数值 y , 则角 $x = \operatorname{arccot} y, y \in \mathbf{R}$.

例如: 已知 $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $x = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$.

已知 $\cos x = \frac{1}{3}$, 则 $x = \arccos \frac{1}{3}$.

已知 $\tan x = 0.6$, 则 $x = \arctan 0.6$.

十、解三角形

【考试大纲】

- 1、掌握直角三角形的边角关系, 会用它们解直角三角形.
- 2、掌握正弦定理和余弦定理, 会用它们解斜三角.

一、解三角形

三角形的三条边与三个角叫做三角形的元素. 由已知其中三个元素 (至少有一个元素是边), 求其余三个元素的过程叫做解三角形.

二、解直角三角形.

1. 解直角三角形的有关定理与公式

在直角三角形中, 由已知的角和边求未知的角和边的过程, 叫解直角三角形.

在 $Rt\triangle ABC$ 中, 设角 C 为 90° , 角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c (如图 10-1), 于是 $Rt\triangle ABC$ 除 $C=90^\circ$ 外, 其他五个元素有如下关系:

(1) 三个角之间的关系:

$$\angle A + \angle B = \angle C = 90^\circ;$$

(2) 三边间的关系:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (\text{勾股定理});$$

(3) 边角之间的关系:

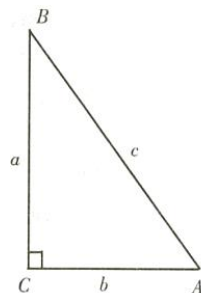


图 10-1

$$\begin{aligned}\sin A &= \cos B = \frac{a}{c}, \\ \sin B &= \cos A = \frac{b}{c}, \\ \tan A &= \cot B = \frac{a}{b}, \\ \tan B &= \cot A = \frac{b}{a}\end{aligned}$$

$$(4) S = \frac{1}{2}ab \quad (S \text{ 为 } Rt \triangle ABC \text{ 的面积})$$

2. 四种类型的问题及其解法

已知条件	解法
斜边、锐角 (如 c 、 A)	$\begin{aligned}(1) \quad & \angle B = 90^\circ - \angle A \\ (2) \quad & a = c \sin A \\ (3) \quad & b = c \cos A \\ (4) \quad & S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}c^2 \sin A \cos A\end{aligned}$
斜边、直角边 (如 c 、 a)	$\begin{aligned}(1) \quad & b = \sqrt{c^2 - a^2} \\ (2) \quad & \text{由 } \sin A = \frac{a}{c}, \text{ 求 } \angle A. \\ (3) \quad & \text{由 } \cos B = \frac{a}{c}, \text{ 求 } \angle B \text{ (或 } \angle B = 90^\circ - \angle A \text{)} \\ (4) \quad & S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a\sqrt{c^2 - a^2}\end{aligned}$
直角边与锐角 (如 a 、 A 或 a 、 B)	$\begin{aligned}(1) \quad & \angle B = 90^\circ - \angle A \text{ 或 } \angle A = 90^\circ - \angle B \\ (2) \quad & c = \frac{a}{\sin A} = \frac{a}{\cos B} \\ (3) \quad & b = a \cot A = a \tan B \\ (4) \quad & S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a^2 \cot A = \frac{1}{2}a^2 \tan B\end{aligned}$

两直角边 (如 a 、 b)	$(1) \ c = \sqrt{a^2 + b^2}$ $(2) \ \text{由 } \tan A = \frac{a}{b}, \text{ 求 } \angle A$ $(3) \ \text{由 } \tan B = \frac{b}{a}, \text{ 求 } \angle B \text{ (或 } \angle B = 90^\circ - \angle A \text{)}$ $(4) \ S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab$
------------------------	--

二、解斜三角形

1. 解斜三角形的有关定理和公式

由斜三角形中三个元素（至少有一个是边）求其余三个未知元素（可能有两解、一解或无解）的过程，叫做解斜三角形。

已知 $\triangle ABC$ 中，设 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 所对应的边为 a 、 b 、 c ， R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径。

(1) 三角形三内角和： $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ ；

(2) 正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ ；

(3) 余弦定理：
$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B ; \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{cases}$$

(4) 三角形面积公式： $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B$



十一 平面向量

【考试大纲】

- 1、理解**向量**的概念，掌握向量的几何表示，了解共线向量的概念.
- 2、掌握向量的加、减运算，了解数乘向量的**运算**，了解两个向量共线的条件.
- 3、了解平面向量的分解定理..
- 4、掌握向量的**数量积**运算，了解其**几何意义**和在处理长度、角度及垂直问题的应用.了解向量垂直的条件.
- 5、了解向量的**直角坐标**的概念，掌握向量的坐标运算.
- 6、掌握平面内两点间的**距离公式**、线段的**中点公式**和**平移公式**.

概念与方法指南

一、向量的概念

1.有向线段

规定了起点和终点的线段叫做有向线段，例如以 A 为起点， B 为终点的有向线段记作 $\overrightarrow{AB}$.有向线段包含三个要素：始点、方向和长度，其中方向是从始点到终点，长度是线段 AB

的长度，记作 $|\overrightarrow{AB}|$.



图 11-1

2. 向量

(1) 定义：既有大小又有方向的量称为向量。

(2) 表示方法：向量可用有向线段表示，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向，用有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 表示向量，称为向量 $\overrightarrow{AB}$ ，另外还常用带箭头的小写字母如 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ， $\cdots$ 表示，在印刷时常用黑体小写字母 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ， $\cdots$ 表示。

(3) 向量的模：向量 $\mathbf{a}$ 的大小叫向量的模（或长度），记作 $|\mathbf{a}|$ 。

(4) 向量相等：两个向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 同向且等长，则称 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 相等，记作 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$ 。

(5) 零向量：长度等于 0 的向量叫做零向量，记为 $\mathbf{0}$ ，零向量的方向不定。

(6) 相反向量：与 $\mathbf{a}$ 大小相等，方向相反的向量，称为 $\mathbf{a}$ 的相反向量，记作 $-\mathbf{a}$ ，特别有 $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$ 。

(7) 平行（或共线）向量：如果若干向量的有向线段所在直线互相平行或重合，则称这些向量平行或共线（如图 11-1（1））。

(8) 单位向量：长度等于 1 的向量称为单位向量。例如图 11-1（2）与向量 $\mathbf{a}$ 同方向的单位向量叫 $\mathbf{a}$ 的单位向量，记作 $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_0 = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ 。

二、向量的加减运算

1. 向量的加法运算

(1) 三角形法则

已知向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ （如图 11-2（1）），在平面上任取一点 A 作 $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}, \overrightarrow{BC}=\mathbf{b}$ ，则向量 $\overrightarrow{AC}$ 叫做向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的和，记作 $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ ，即 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$ （如图 11-2（2））。

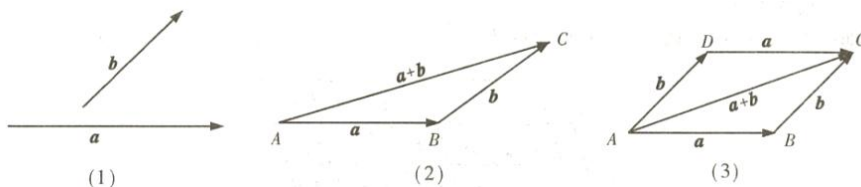


图 11-2

(2) 平行四边形法则

已知 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ （如图 11-2（1）），在平面上取一点 A ，作 $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}, \overrightarrow{AD}=\mathbf{b}$ ，以 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ 为邻边作 $\square ABCD$ ，则其对角线 $\overrightarrow{AC}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$ ，即 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$ （如图 11-2（3））。

多个向量相加，如图 11-3，采用多边形法则： $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$ 。

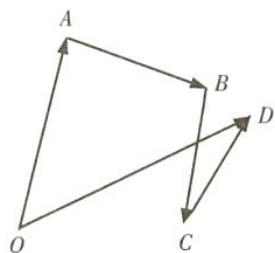


图 11-3

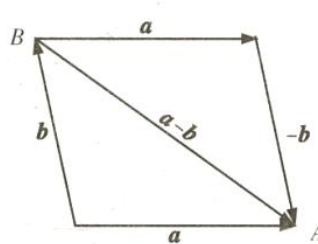


图 11-4

(3) 向量加法的运算律

向量的加法满足如下运算律：

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad (\text{交换律}), \\ (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} &= \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \quad (\text{结合律}) \end{aligned}$$

2. 向量的减法运算

如图 11-4, $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$, 一个向量减去一个向量等于加上这个向量的相反向量. 一个向量 ($\overrightarrow{BA}$) 等于它的终点 (A) 的位置向量, 减去它的起点 (B) 的位置向量. 即以减向量的终点为始点, 以被减向量的终点为终点的向量叫这两个向量的差.

三、数乘向量、两向量共线的条件

1. 实数 λ 与向量 $\mathbf{a}$ 的乘积是一个向量, 记作 $\lambda\mathbf{a}$ 且 $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda||\mathbf{a}|$, 若 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, 当 $\lambda > 0$ 时, $\lambda\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}$ 方向相同, 当 $\lambda < 0$ 时, $\lambda\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}$ 方向相反, 当 $\lambda = 0$ 或 $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 时, $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$ 或 $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$ (如图 11-5)

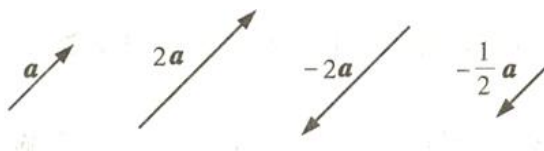


图 11-5

数乘向量满足下列运算法则 ($\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 为任意向量, λ 、 μ 为任意实数):

- (1) $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$;
- (2) $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$;
- (3) $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$.

2. 两个非零向量 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 共线的充要条件是有且只有一个实数 λ , 使得 $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{b}$.

四、平面向量的分解定理、直线的向量参数方程

1. 平面向量的分解定理

如图 11-6, $\mathbf{e}_1$ 、 $\mathbf{e}_2$ 是两个不平行的向量, 则 $\overrightarrow{AB} = 5\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$, $\overrightarrow{EF} = 8\mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_2$, $\overrightarrow{CD} = -2\mathbf{e}_1 + 6\mathbf{e}_2$.

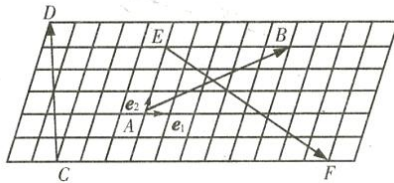


图 11-6

如果 e_1 、 e_2 是同一平面上两个不共线的向量，那么对于该平面上的任一向量 a ，存在唯一的一对实数 a_1 、 a_2 ，使得 $a = a_1e_1 + a_2e_2$ ，其中 $\{e_1, e_2\}$ 叫平面上的全体向量的一组基底， e_1 、 e_2 叫基向量。

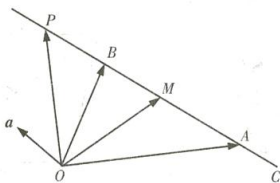


图 11-7

2.直线的向量参数方程

如图 11-7，已知 A 、 B 是直线 l 上任意两点， O 是 l 外的一点，则点 P 在 l 上的充要条件是存在实数 t ，使

$$\overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \quad (*)$$

则向量等式 $(*)$ 叫直线 l 的向量参数方程，其中实数 t 叫参数，在 $(*)$ 式中，当 $t = \frac{1}{2}$ 时，点 P 是线段 AB 的中点 M ， $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ ，这是线段 AB 的中点的向量表达式。

五、向量的直角坐标运算

1.向量的坐标表示

在平面直角坐标系 xOy 内(如图 11-8)分别取与 x 、 y 轴方向相同的两个单位向量 e_1 、 e_2 ，在 xOy 平面上任一向量 a ，由平面向量分解定理可知存在唯一的有序实数对 (a_1, a_2) ，使得

$$a = a_1e_1 + a_2e_2,$$

(a_1, a_2) 叫向量 a 在 xOy 中的坐标，记作 $a = (a_1, a_2)$ ，

其中 e_1 、 e_2 叫做直角坐标平面上的基底，显然 $0 = (0, 0)$ ， $e_1 = (1, 0)$ ， $e_2 = (0, 1)$ 。

2.向量的坐标运算

(1) 设 $a = (a_1, a_2)$ ， $b = (b_1, b_2)$ ，

则 $a + b = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ ，

$a - b = (a_1, a_2) - (b_1, b_2) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$ ， $\lambda a = \lambda(a_1, a_2) = (\lambda a_1, \lambda a_2)$ 。

(2) 设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，则

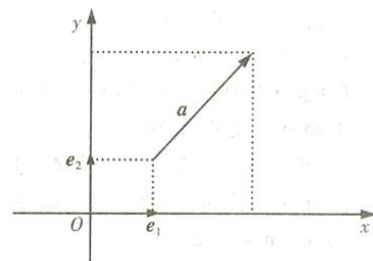


图 11-8

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

3. 基本公式

(1) 向量的长度及两点间的距离公式

如图 11-9 (1), 设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, 则 $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则

$$d_{AB} = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(2) 中点公式

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 线段 AB 的中点为 $M(x, y)$, 则

$$x = \frac{x_2 + x_1}{2}, y = \frac{y_2 + y_1}{2}$$

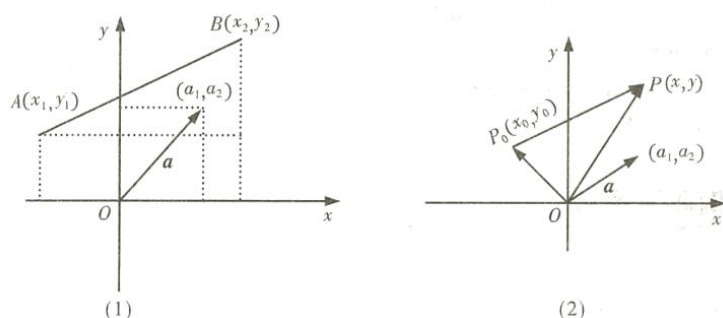


图 11-9

(3) 点平移变换公式

图若直角坐标平面内的图形 F 上的所有点, 按向量 $\mathbf{a} = (h, k)$ 移动到图形 F' , 则称图形 F 到图形 F' 的变换为平移变换.

如图 11-9 (2), 已知点 $P_0(x_0, y_0)$, 向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, 将点 $P_0(x_0, y_0)$ 按向量 $\mathbf{a}$ 平移到点

$P(x, y)$, 则有 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \mathbf{a}$, 换用坐标表示: $(x, y) = (x_0, y_0) + (a_1, a_2)$, 即

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 \\ y = y_0 + a_2 \end{cases}$$

六、向量的数量积

1. 向量的夹角

设两非零向量 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$, 作 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, 则 $\angle AOB$ 就叫做向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角 (如图 11-10), 记作 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, 且规定 $0 \leq \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \leq \pi$.

当 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 90^\circ$ 时, 则称 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 垂直, 记作 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$;

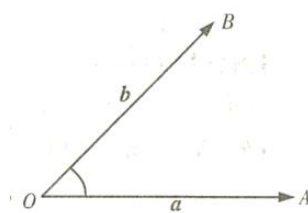


图 11-10

当 $\langle a, b \rangle = 0^\circ$ 时, a 与 b 同向;

当 $\langle a, b \rangle = 180^\circ$ 时, a 与 b 反向.

2. 向量 a 、 b 的数量积

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos \langle a, b \rangle.$$

【注】 $a \cdot b$ 的几何意义: $a \cdot b$ 等于 $|a|$ 与 b 在 a 方向上的投影 $|b| \cos \langle a, b \rangle$ 的乘积.

3. 向量的数量积的性质

(1) 两个向量的数量积是实数, 可以等于正数、负数或零

(2) e 为单位向量, 则 $a \cdot e = e \cdot a = |a| \cos \langle a, e \rangle$.

(3) $a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0$.

(4) $a \cdot a = |a|^2$ 或 $|a| = \sqrt{a \cdot a}$.

(5) $\cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}$.

(6) $|a \cdot b| \leq |a| \cdot |b|$.

4. 数量积的坐标表示

在坐标平面 xOy 内, 已知 $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$,

则 $a \cdot b = (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

性质: $a \perp b \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$;

$a \parallel b \Leftrightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ 或 $a \parallel b \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$.

运算律: $a \cdot b = b \cdot a$;

$\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b) (\lambda \in \mathbf{R})$;

$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

十二、 直线

【考试大纲】

- 1、理解直线的**倾斜角**和**斜率**的概念，会求直线的斜率.
- 2、会求**直线方程**，会用直线方程解决有关问题.
- 3、了解两条直线**平行**与**垂直**的条件以及点到直线的**距离公式**，会用它们解决有关问题.

一、直线的倾斜角和斜率

1.倾斜角

一条直线向上的方向与 x 轴的正方向所成的最小正角 α ，叫做这条直线的**倾斜角**。

特别地，当直线平行于 x 轴时，规定它的倾斜角为 0° ，因此倾斜角的取值范围是 $0^{\circ}\leq\alpha<180^{\circ}$.

2.斜率

一条直线的倾斜角 $\alpha(\alpha\neq 90^{\circ})$ 的正切值，叫做这条直线的斜率斜率常用 k 来表示，即

$$k=\tan \alpha \qquad \text{①}$$

当 α 为锐角时， $k>0$ ；当 α 为钝角时， $k<0$ ；当 $\alpha=90^{\circ}$ 时， k 不存在；当 $\alpha=0^{\circ}$ 时， $k=0$.

3.斜率公式

如果 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$ 是直线上的任意两点，那么这条直线的斜率： $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_2\neq x_1)$

$$\text{②}$$

当 $x_2=x_1$ 时，直线平行于 y 轴或与 y 轴重合，倾斜角 $\alpha=90^{\circ}$ ，斜率不存在

当 $y_2=y_1$ 时，直线平行于 x 轴或与 x 轴重合，倾斜角 $\alpha=0^{\circ}$ ，斜率 $k=0$.

注：由斜率的坐标公式②可知，直线的斜率与两点的顺序无关.特别地，当其中一点为原点时，该公式就成为非原点的纵坐标与横坐标之比。

4.直线的截距

在平面直角坐标系中，直线与 y 轴交点的纵坐标叫做直线在 y 轴上的截距(或称纵截距)；直线与 x 轴交点的横坐标叫做直线在 x 轴上的截距（或称横截距），二者统称为直线的截距.

二、直线方程的五种形式名称

名称	已知条件	方程形式	说明
斜截式	斜率 k 和直线在 y 轴上的截距 b	$y=kx+b$	不包括 y 轴和平行于 y 轴的直线

点斜式	直线过点 $P_1(x_1, y_1)$ 和斜率 k	$y - y_1 = k(x - x_1)$	不包括 y 轴和平行于 y 轴的直线
两点式	直线过点 $P_1(x_1, y_1)$ 和点 $P_2(x_2, y_2) (x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2)$	$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$	不包括坐标轴和平行于坐标轴的直线
截距式	直线在 x 轴上的截距是 $a(a \neq 0)$, 直线在 y 轴上的截距是 $b(b \neq 0)$	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	不包括经过原点的直线以及平行于坐标轴的直线
一般式	A, B 不同时为零	$Ax + By + C = 0$	任何一条直线都可以写成此形式

几种特殊直线的方程

平行于 x 轴的直线: $y = b(b \neq 0)$; x 轴: $y = 0$.

平行于 y 轴的直线: $x = a(a \neq 0)$; y 轴: $x = 0$.

经过原点 (不包括坐标轴) 的直线 $y = kx$.

第 I、III 象限的角平分线为 $y = x$; 第 II、IV 象限的角平分线为 $y = -x$.

三、两直线的位置关系

设两直线斜率都存在, 其方程分别为 $l_1: y = k_1x + b_1$ (或 $A_1x + B_1y + C_1 = 0$), $l_2: y = k_2x + b_2$ (或 $A_2x + B_2y + C_2 = 0$) (A_2, B_2, C_2 不等于 0)

1. 两条直线平行、重合、垂直、相交

(1) 直线 l_1 与 l_2 平行 $\Leftrightarrow k_1 = k_2$ 且 $b_1 \neq b_2$ (或 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$)

(2) 直线 l_1 与 l_2 重合 $\Leftrightarrow k_1 = k_2$ 且 $b_1 = b_2$ (或 $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$)

(3) 直线 l_1 与 l_2 垂直 $\Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$ (或 $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$)

(4) 直线 l_1 与 l_2 相交 $\Leftrightarrow k_1 \neq k_2$ (或 $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$) (垂直是相交的特殊情况).

2. 两直线的交点坐标

已知两条直线的方程分别为 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0, l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$. 解方程组

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

如果方程组有唯一解, 这个解就是两条直线交点的坐标; 无解, 两条直线平行; 无穷多解, 两条直线重合.

3.点到直线的距离

点到直线的垂线段的长，叫做点到直线的距离.

设点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $Ax + By + C = 0$ 的距离为 d ，则

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

4.两平行线间的距离

设 $l_1: Ax + By + C_1 = 0, l_2: Ax + By + C_2 = 0$ ，且 $l_1 \parallel l_2$ ，距离为 d ，则

$$d = \frac{|C_2 - C_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (\text{也可用点到直线的距离公式去求})$$

5.两条直线所成的角

两条直线相交构成的不大于直角的角，叫做两条直线所成的角，简称两直线的夹角.

设已知两条直线的方程为 $l_1: y = k_1x + b_1, l_2: y = k_2x + b_2$ ，它们的夹角为 θ .

如果 $1 + k_1k_2 = 0$ ，则 $\theta = \frac{\pi}{2}$

如果 $1 + k_1k_2 \neq 0$ ，则 $\tan \theta = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1} \right| \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ ，则

如果已知直线的方程为 $\begin{cases} l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$ ，则

$$\tan \theta = \left| \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} \right| \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

十三、圆锥曲线

【考试大纲】

- 1、了解曲线和方程的关系，会求两条曲线的交点.
- 2、掌握圆的标准方程和一般方程以及直线与圆的位置关系，能灵活运用它们解决有关问题.
- 3、理解椭圆、双曲线、抛物线的概念，掌握它们的标准方程和性质，会用它们解决有关问题.

【知识结构框图】



第一节 曲线和方程、圆

一、曲线和方程

1.定义

在直角坐标系中，如果某曲线 C 上的点与一个二元方程 $f(x, y) = 0$ 的实数解建立了如下关系：

- (1) 曲线上的点的坐标都是这个方程的解；
 - (2) 以这个方程的解为坐标的点都是曲线上的点，
- 那么，这个方程叫做曲线的方程，这条曲线叫做方程的曲线.

2.曲线的交点

- (1) 曲线与坐标轴的交点.

在方程 $f(x, y) = 0$ 中，令 $x=0$ ，可求出曲线与 y 轴的交点；在方程 $f(x, y) = 0$ 中，令 $y=0$ ，可求出曲线与 x 轴的交点

- (2) 两曲线的交点

求两曲线的交点通常是由求方程组 $\begin{cases} F_1(x, y) = 0 \\ F_2(x, y) = 0 \end{cases}$ 的解而得出，方程组有几组实数解，曲线就有几个交点，没有实数解，曲线就不相交.

3.求曲线方程的一般步骤

- (1) 建系：建立适当的平面直角坐标系.
- (2) 设点：用 (x, y) 表示曲线上任意一点的坐标.
- (3) 列式：把动点轨迹符合的几何条件代数化，列成关于 x, y 的等式.
- (4) 化简：经过各种变换化简所得的等式.

4.由方程画出曲线

由已知方程画出它的曲线，一般用描点法.

为了能够正确而迅速地画出方程的曲线，列表前可对方程 $f(x, y) = 0$ 进行讨论，以便减少列表描点的盲目性，主要讨论如下几项

(1) 曲线在两坐标轴上的截距

在方程 $f(x, y) = 0$ 中，令 $y = 0$ ，求得实数 x 的解，这个解就是曲线在 x 轴上的截距。

在方程 $f(x, y) = 0$ 中，令 $x = 0$ ，求得实数 y 的解，这个解就是曲线在 y 轴上的截距。

(2) 曲线的对称性

如果用 $-y$ 代替方程 $f(x, y) = 0$ 中的 y ，方程不变，则曲线关于 x 轴对称。

如果用 $-x$ 代替方程 $f(x, y) = 0$ 中的 x ，方程不变，则曲线关于 y 轴对称。

如果用 $-x$ ， $-y$ 分别代替方程 $f(x, y) = 0$ 中的 x, y ，方程不变，则曲线关于原点对称。

(3) 曲线的范围

把方程 $f(x, y) = 0$ 变形成 $y = \varphi(x)$ 和 $x = \psi(y)$ 的形式，找出 x, y 的取值范围。

二、圆

1. 圆的定义

平面内到定点的距离等于定长的点的轨迹称为圆，定点为圆心，定长为半径。

2. 圆的标准方程

设圆心在点 (a, b) ，半径为 r ，则圆的标准方程为

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

圆心在原点 $(0, 0)$ ，半径为 r 时，圆的方程是 $x^2 + y^2 = r^2$

3. 圆的一般方程

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ ($D^2 + E^2 - 4F > 0$)，经过配方此方程可配成

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

当 $D^2 + E^2 - 4F > 0$ 时，方程表示的是圆心在点 $\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ ，半径是 $\frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$ 的圆；否则，此方程表示的不是圆。

4. 点与圆的位置关系

点 $P(x_0, y_0)$ 与圆 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 的位置关系：点 P 到圆心的距离

$$d = \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2}$$

当 $d = r$ 时点 P 在圆上，当 $d < r$ 时点 P 在圆内；当 $d > r$ 时点 P 在圆外。

5. 直线与圆的位置关系

直线 $Ax + By + C = 0$ 与圆 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 的位置关系：设圆心到直线的距离为

$$d = \frac{|A \cdot a + B \cdot b + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

当 $d < r$ 时直线和圆相交；当 $d = r$ 时直线与圆相切；当 $d > r$ 时，直线和圆相离。

6. 圆的切线方程

过圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 上一点 $P_0(x_0, y_0)$ 的切线方程是： $\underline{x_0 x + y_0 y = r^2}$

十四、排列与组合

【考试大纲】

- 1、了解分类计数原理和分步计数原理.
- 2、了解排列、组合的意义，会用排列数、组合数的计算公式.
- 3、会解排列、组合的简单应用题.

一、分类计数原理、分步计数原理.

	分类计数原理(加法原理)	分步计数原理(乘法原理)
定义	做一件事，完成它有 n 类方法，第一类有 m_1 种不同的方法，第二类有 m_2 种不同的方法，...，第 n 类有 m_n 种不同的方法，那么完成这件事共有 $N = m_1 + m_2 + \dots + m_n$ 种不同的方法.	做一件事，完成它需要分成 n 个步骤，做第一步有 m_1 种不同的方法，做第二步有 m_2 种不同的方法，...，做第 n 步有 m_n 种不同的方法.那么完成这件事共有 $N = m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$ 种不同的方法.
区别	与分类有关	与分步有关

【注】分类计数原理和分步计数原理是排列、组合计数的理论依据，它不仅是推导排列数、组合数的基础，而且也常直接用来解题.

分类计数原理要注意“类”与“类”之间所具有的独立性和并列性；**例如：**从甲地到乙地，可以乘火车也可以乘飞机，每天火车有 3 班，飞机有 1 班，问一天中乘不同班次的火车或飞机，共有几种不同的走法.实际上，从甲地到乙地有两类办法，一类是乘火车，有 3 种走法；另一类是乘飞机，有 1 种走法，不论用哪一类办法中的哪一种走法，都可以到达目的地，所以共有 $3+1=4$ 种走法.

分步计数原理与分“步”有关，要注意“步”与“步”之间所具有的相依性和连续性.**例如：**从甲地到丙地必须经过乙地，甲地到乙地有 3 种走法，乙地到丙地有 2 种走法，问从甲地到丙地共有多少种不同的走法？事实上，从甲地到丙地可以分成两步骤完成：第一步先从甲地到乙地，有 3 种不同的走法；第二步接着从乙地到丙地，又有 2 种不同的走法，连续完成这两个步骤便可抵达目的地，所以共有 $3 \times 2 = 6$ 种不同的走法.

二、排列、组合

	排列	组合
定义	从 n 个不同元素中，任取 m ($m, n \in \mathbf{N}_+$ 且 $m \leq n$) 个，按照一定的顺序排成一列，称为从 n 个不同元素中任意取出 m 个元素的一个排列	从 n 个不同元素中，任取 m ($m, n \in \mathbf{N}_+$ 且 $m \leq n$) 个元素并成一组，称为从 n 个不同元素中任意取出 m 个元素的一个组合.
符号	从 n 个不同元素中取出 m ($m, n \in \mathbf{N}_+$ 且 $m \leq n$) 个元素的所有排列的个数，称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，用符号 P_n^m ，表示（或记为 $A_n^{m!}$ ）	从 n 个不同元素中取出 m ($m, n \in \mathbf{N}_+$ 且 $m \leq n$) 个元素的所有组合的个数，称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数，用 C_n^m 表示
公式	(1) 连乘形式 $P_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$ (2) 阶乘形式 $P_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$，规定 $0! = 1$ (3) 全排列数公式 $P_n^n = n!$	(1) $C_n^m = \frac{P_n^m}{P_m^m} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$ (2) $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$，规定 $C_n^0 = 1$
性质	(1) $P_n^m = n P_{n-1}^{m-1}$ (2) $P_n^m = (n-m+1) P_n^{m-1}$	(1) $C_n^n = C_n^{n-m}$ (2) $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$
区别	与顺序有关	与顺序无关

【注】 n 的阶乘表示为 $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \times 2 \times 1$

三、排列组合的简单应用题

排列、组合的应用题大致可以分为三类:

1. 不带限制条件的排列或组合题；
2. 带限制条件的排列或组合题；
3. 排列、组合综合题.

对于第 1 类题，可直接根据有关公式求得结果.

对于第 2 类题，通常有两种计算方法：

- (1) 直接算法：把符合限制条件的排列（或组合）种数直接计算出来.

(2) 间接算法：先算出无限制条件的所有排列（或组合）种数，再从中减去全部不符合条件的排列（或组合）种数.

对于第3类题，通常先考虑组合，后考虑排列.

解排列、组合的简单应用题时，要注意以下几点：

1.明确问题是排列问题还是组合问题（排列与元素排列顺序有关，组合与元素排列顺序无关）；

2.正确使用分类计数原理与分步计数原理（分类计数原理与分类有关，分步计数原理与分步有关）；

3.考察被考虑的排列、组合是否恰是符合要求的所有不同答案（既不要重复也不要遗漏）

十五、 概率、统计初步

【考试大纲】

- 1、了解**随机事件**及其概率意义.
- 2、了解**等可能性事件**的概率的意义，会用计数方法和**排列组合基本公式**计算一些等可能性事件的概率.
- 3、了解互斥事件的意义，会用**互斥事件的概率加法公式**计算一些事件的概率.
- 4、了解相互独立事件的意义，会用**相互独立事件的概率乘法公式**计算一些事件的概率.
- 5、会计算事件在 n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率.
- 6、了解**总体和样本**的概念，会计算样本平均数和样本方差.

一、随机事件及概率

1.定义

在一定的条件下，必然要发生的事件，叫做**必然事件**，不可能发生的事件叫做**不可能事件**，可能发生也可能不发生的事件叫做**随机事件**.

例如：“抛一石块下落”是必然事件，“当 a 为实数时， $a^2 < 0$ ”是不可能事件；事件“某地五月一日下雨”、“某人射击一次，中靶”都是随机事件.

2.随机事件的概率

(1) 概率：在大量重复进行同一次试验时，事件 A 发生的频率 $\frac{m}{n}$ （其中， n 为试验的次数， m 为事件 A 发生的次数）总接近于某个常数，在它附近摆动，则称这个常数是事件 A 的概率，记作 $P(A)$ ，并且 $0 \leq P(A) \leq 1$ ，此时必然事件 A 的概率是 1，不可能事件的概率是 0.

(2) 频率：在确定的条件下，在 n 次试验中，如果事件 A 发生了 m 次，我们把 $\frac{m}{n}$ 叫做事件 A 发生的频率.

二、等可能事件的概率

1.基本事件

一次试验中，可能出现的每一个结果称为一个**基本事件**.

2.每一个基本事件的概率

如果一次试验，由 n 个基本事件组成，且所有基本事件出现的可能性相等，那么每一个基本事件的概率均为 $\frac{1}{n}$.

一般地，如果一次试验中共有 n 种可能出现的结果，其中事件 A 包含的结果有 m 种，

那么事件 A 的概率 $P(A)$ 是 $\frac{m}{n}$ ，即 $P(A) = \frac{m}{n}$.

三、互斥事件有一个发生的概率

1.不可能同时发生的两个事件，叫做**互斥事件**.

2.若事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中的任何两个都是互斥事件，则称事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 彼此互斥

3.互斥事件的概率加法公式：设事件 A, B 互斥，把 A, B 中有一个发生的事件记作 $A+B$ ，则有

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

如果事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 彼此互斥，那么事件 $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ 发生（即 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 中有一个发生）的概率，等于这 n 个事件分别发生的概率的和，即

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

3.试验时，如果两个互斥事件 A, B 中必有一个发生，那么就称 A, B 为对立事件，一个事件 A 的对立事件记为 $\bar{A}$. 可见， $A + \bar{A}$ 是一个必然事件，即 $P(A + \bar{A}) = 1$ ，且 $P(A) + P(\bar{A}) = P(A + \bar{A}) = 1$ ，即两个对立事件的概率的和等于 1，由此可得

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

四、相互独立事件同时发生的概率

1.事件 A （或 B ）是否发生对事件 B （或 A ）发生的概率没有影响，这样的两个事件叫做**相互独立事件**.

2.相互独立事件的概率乘法公式：若 A, B 是相互独立事件，它们同时发生的概率记作 $P(A \cdot B)$ ，那么

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

一般地，若事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立，它们同时发生的概率

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdots P(A_n)$$

五、独立重复试验

若在一次试验中某事件发生的概率是 p ，那么在 n 次独立重复试验中，这个事件恰好发生 k 次的概率

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

六、统计初步

1. 总体与样本

在统计中，所要考查对象的全体叫做总体，其中每一个考查对象叫做个体，从总体中所抽取的部分个体叫做总体的一个样本，样本中个体的数目叫做样本容量。

2. 样本平均数

样本中所有个体的平均数叫做样本平均数。

3. 样本方差

在一组数据 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 中，若其平均数为 $\bar{x}$ ，那么

$$\frac{1}{n} \left[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 \right]$$

叫做这组数据的样本方差，记作 S^2 。

计算样本平均数与样本方差可以使用计算器。